Série 1.

Exercice 1 :

1/ $[T] = [T_1] + [T_2] + [T_3]$

$[T_1] = \begin{pmatrix} \vec{u} \\ \vec{M}_1 \end{pmatrix}$ est le torseur associé au moment de $\vec{u}$.

$[T_2] = \begin{pmatrix} \vec{v} \\ \vec{M}_2 \end{pmatrix}$ est " " au moment de $\vec{v}$

$[T_3] = \begin{pmatrix} \vec{w} \\ \vec{M}_3 \end{pmatrix}$ est " " au moment de $\vec{w}$.

* Les élt de réduction de $[T]$ en O sont :

$$[T]_O = \begin{pmatrix} \vec{R} = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w} \\ \vec{M}_O = \vec{M}_{1,O} + \vec{M}_{2,O} + \vec{M}_{3,O} \end{pmatrix}$$

$$\vec{R} = \begin{pmatrix} 0 \\ m \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -m \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ m \end{pmatrix}$$

$$\vec{M}_O = \vec{OA} \wedge \vec{u} + \vec{OB} \wedge \vec{v} + \vec{OC} \wedge \vec{w}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ m \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -1 \\ -m \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m \\ 1 \\ m \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2m \\ 3 \\ 2m-1 \end{pmatrix}$$

2/- L'invariance scalaire de $[T]$

$$I_{[T]} = \vec{R} \cdot \vec{M}_O = \begin{pmatrix} 2m \\ 3 \\ 2m-1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ m \end{pmatrix}$$

$= 4m + 2m^2 - m$

$= 3m + 2m^2$

Si $[T]$ est un glisseur alors, son invariant scalaire est nul $2m^2 + 3m = 0$

$\Rightarrow m = 0$ ou $m = -\frac{3}{2}$

3/- Equation cartésienne de l'axe Centrale.

* Pour $m = 0$, le torseur $[T]$ est un glisseur, alors si $P\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in$ à l'axe centrale de $[T]$

$\vec{MP} = \vec{0}$

$\vec{M_P} = \vec{M_O} + \vec{R} \wedge \vec{OP}$ → propriété d'antisym

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -2z \\ 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3-2z \\ 2y-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 3 - 2z = 0 \\ 2y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = \frac{3}{2} \\ y = \frac{1}{2} \\ x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Equation cartésienne de l'axe centrale de $[T]$ pour $m = 0$

L'axe centrale est la droite perpendiculaire sur le plan $(O, \vec{y}, \vec{z})$ et passant par le pt $(0, \frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ (coordonnées barycentriques)

* Pour $m = -\frac{3}{2}$, $[T]$ est glisseur si $P\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in$ à son axe central alors $\vec{MP} = \vec{0}$

$\vec{MP} = \vec{M_O} + \vec{R} \wedge \vec{OP}$

$$= \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -3 + \frac{3}{2}y \\ 3 - \frac{3}{2}x - 2z \\ -4 + 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -3 + \frac{3}{2}y = 0 \\ 3 - \frac{3}{2}x - 2z = 0 \\ -4 + 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ 2z + \frac{3}{2}x - 3 = 0 \end{cases}$$

équation cartésienne de l'axe centrale pour $m = -\frac{3}{2}$.

Scanné avec CamScanner

L'axe central est la droite passant par les points $\left(0, 2, \frac{3}{2}\right)$ et $\left(1, 2, \frac{3}{4}\right)$.

4/- La décomposition du [T]

$[T] = \left(\begin{matrix}\vec{R} \\ \vec{M}\end{matrix}\right)$; $\vec{R}\begin{pmatrix}2\\0\\m\end{pmatrix}$

* $[T] = [G] + [C]$

[G] est le torseur glisseur

$[G] = \left(\begin{matrix}\vec{R} = \begin{pmatrix}2\\0\\m\end{pmatrix} \\ \vec{M}\end{matrix}\right)$ (à condition

$\vec{M}_{A,A} = \vec{0}$, A ∈ à son axe central)

[C] est le torseur couple $\vec{M_A}$

$[C] = \left(\begin{matrix}\vec{0} \\ \vec{M_A}\end{matrix}\right)$.

$\vec{M_A} = \vec{M_0} + \vec{R} \wedge \vec{OA}$

$= \begin{pmatrix}2m\\3\\2m-1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\0\\m\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix}2m\\3\\2m-1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-m\\m\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}m\\3+m\\2m+1\end{pmatrix}$

Exercice 3:

1/- * pour le torseur $[T_1]$

l'invariant scalaire est :

$I_1 = \vec{R_1} \cdot \vec{M}_{1,O} = \begin{pmatrix}-\alpha\sin(\alpha)\\-\alpha\cos(\alpha)\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos(\alpha)\\-\sin(\alpha)\\0\end{pmatrix}$

$= -\alpha\sin(\alpha)\cos(\alpha) + \alpha\cos(\alpha)\sin(\alpha)$

$= 0$

Alors $[T_1]$ est un glisseur.

* pour le torseur $[T_2]$

$I_2 = \vec{R_2} \cdot \vec{M}_{2,O} = \begin{pmatrix}-\alpha\sin(\alpha)\\\alpha\cos(\alpha)\\0\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}\cos(\alpha)\\\sin(\alpha)\\0\end{pmatrix}$

$= -\alpha\sin(\alpha)\cos(\alpha) + \alpha\cos(\alpha)\sin(\alpha)$

$= 0$ donc $[T_2]$ est un glisseur

2/- on calcule $\vec{M}_{1,A}$ et $\vec{M}_{2,A}$

$\vec{M}_{1,A} = \vec{M}_{1,O} + \vec{R}_1 \wedge \vec{OA}$

$= \begin{pmatrix}\cos(\alpha)\\-\sin(\alpha)\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-\alpha\sin(\alpha)\\-\alpha\cos(\alpha)\\0\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix}\cos(\alpha)\\-\sin(\alpha)\\\alpha(\cos(\alpha)-\sin(\alpha))\end{pmatrix}$

$\vec{M}_{2,A} = \vec{M}_{2,O} + \vec{R}_2 \wedge \vec{OA}$

$= \begin{pmatrix}\cos\alpha\\\sin\alpha\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-\alpha\sin\alpha\\\alpha\cos\alpha\\0\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix}\cos(\alpha)\\\sin(\alpha)\\-\alpha(\sin\alpha+\cos\alpha)\end{pmatrix}$

3/- la décomposition de

$[T] = [T_1] + [T_2]$

$[T] = \left(\begin{matrix}\vec{R} = \vec{R_1} + \vec{R_2} \\ \vec{M}\end{matrix}\right)$; $\vec{R}\begin{pmatrix}-2\alpha\sin\alpha\\0\\0\end{pmatrix}$

$\rightarrow [T] = [G] + [C]$

$[G] = \left(\begin{matrix}\vec{R} \\ \vec{M}_G\end{matrix}\right)$; $\begin{cases}\vec{R}\begin{pmatrix}-2\alpha\sin\alpha\\0\\0\end{pmatrix}\\ \vec{M}_{G,O} = \vec{0}\end{cases}$

$\forall$ pc l'espace $\vec{M}_{G,P} = \vec{M}_{G,O} + \vec{R} \wedge \vec{OP}$

$= \vec{0} + \vec{R} \wedge \vec{OP}$

$[C] = \left(\begin{matrix}\vec{0} \\ \vec{M_O}\end{matrix}\right)$, $\vec{M_O} = \vec{M}_{1,O} + \vec{M}_{2,O}$

$= \begin{pmatrix}2\cos\alpha\\0\\0\end{pmatrix}$

4/- les valeurs de α pour que [T] soit un couple $\Rightarrow \vec{R} = \vec{0}$

$\Rightarrow -2\alpha\sin\alpha = 0$

$\Rightarrow \alpha = 0$ ou $\sin\alpha = 0$

$\Rightarrow \alpha = 0$ ou $\alpha = K\pi$, $K \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow \alpha = K\pi$, $K \in \mathbb{Z}$

- Les valeurs de α pour [T] soit un glisseur.

SHOT ON OPPO

Scanné avec CamScanner

L'axe centrale est la droite passant par les points $(0, 2, \frac{3}{2})$ et $(1, 2, \frac{3}{4})$.

4/- La décomposition du [T]

$$[T] = \left(\begin{matrix}\vec{R} \\ \vec{M}\end{matrix}\right), \quad \vec{R}\begin{pmatrix}2\\0\\m\end{pmatrix}$$

* $[T] = [G] + [C]$

[G] est le torseur glisseur

$$[G] = \left(\begin{matrix}\vec{R} = \begin{pmatrix}2\\0\\m\end{pmatrix} \\ \vec{M}\end{matrix}\right)$$ (à condition

$\vec{M}_{A,A} = \vec{0}$, A c'est son axe central)

[C] est le torseur couple $\vec{M}_A$

$$[C] = \left(\begin{matrix}\vec{0} \\ \vec{M}_A\end{matrix}\right).$$

$$\vec{M}_A = \vec{M}_0 + \vec{R} \wedge \vec{OA}$$

$$= \begin{pmatrix}2m\\3\\2m-1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\0\\m\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}2m\\3\\2m-1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-m\\m\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}m\\3+m\\2m+1\end{pmatrix}$$

Exercice 3:

1/- * Pour le torseur $[T_1]$

l'invariant scalaire est :

$$I_1 = \vec{R}_1 \cdot \vec{M}_{1,0} = \begin{pmatrix}-\alpha\sin(\alpha)\\-\alpha\cos(\alpha)\\0\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}\cos(\alpha)\\-\sin(\alpha)\\0\end{pmatrix}$$

$$= -\alpha\sin(\alpha)\cos(\alpha) + \alpha\cos(\alpha)\sin(\alpha)$$

$$= 0$$

Alors $[T_1]$ est un glisseur.

* pour le torseur $[T_2]$

$$I_2 = \vec{R}_2 \cdot \vec{M}_{2,0} = \begin{pmatrix}-\alpha\sin(\alpha)\\\alpha\cos(\alpha)\\0\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}\cos(\alpha)\\\sin(\alpha)\\0\end{pmatrix}$$

$$= -\alpha\sin(\alpha)\cos(\alpha) + \alpha\cos(\alpha)\sin(\alpha)$$

$= 0$ donc $[T_2]$ est un glisseur

2/- on calcule $\vec{M}_{1,A}$ et $\vec{M}_{2,A}$

$$\vec{M}_{1,A} = \vec{M}_{1,0} + \vec{R}_1 \wedge \vec{OA}$$

$$= \begin{pmatrix}\cos(\alpha)\\-\sin(\alpha)\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-\alpha\sin(\alpha)\\-\alpha\cos(\alpha)\\0\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}\cos(\alpha)\\-\sin(\alpha)\\\alpha(\cos(\alpha)-\sin(\alpha))\end{pmatrix}$$

$$\vec{M}_{2,A} = \vec{M}_{2,0} + \vec{R}_2 \wedge \vec{OA}$$

$$= \begin{pmatrix}\cos\alpha\\\sin\alpha\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-\alpha\sin\alpha\\\alpha\cos\alpha\\0\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}\cos(\alpha)\\\sin(\alpha)\\-\alpha(\sin\alpha+\cos\alpha)\end{pmatrix}$$

3/- La décomposition de

$$[T] = [T_1] + [T_2]$$

$$[T] = \left(\begin{matrix}\vec{R} = \vec{R}_1 + \vec{R}_2 \\ \vec{M}\end{matrix}\right), \quad \vec{R}\begin{pmatrix}-2\alpha\sin\alpha\\0\\0\end{pmatrix}$$

$\rightarrow [T] = [G] + [C]$

$$[G] = \left(\begin{matrix}\vec{R} \\ \vec{M}_G\end{matrix}\right), \begin{cases}\vec{R}\begin{pmatrix}-2\alpha\sin\alpha\\0\\0\end{pmatrix}\\ \vec{M}_{G,O} = \vec{0}\end{cases}$$

$\forall$ pc l'espace $\vec{M}_{G,P} = \vec{M}_{G,O} + \vec{R} \wedge \vec{OP}$

$$= \vec{0} + \vec{R} \wedge \vec{OP}$$

$$[C] = \left(\begin{matrix}\vec{0} \\ \vec{M}_O\end{matrix}\right), \quad \vec{M}_O = \vec{M}_{1,O} + \vec{M}_{2,O}$$

$$= \begin{pmatrix}2\cos\alpha\\0\\0\end{pmatrix}$$

4/- Les valeurs de α pour que [T] soit un couple $\Rightarrow \vec{R} = \vec{0}$

$\Rightarrow -2\alpha\sin\alpha = 0$

$\Rightarrow \alpha = 0$ ou $\sin\alpha = 0$

$\Rightarrow \alpha = 0$ ou $\alpha = K\pi$, $K \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow \alpha = K\pi$, $K \in \mathbb{Z}$

- Les valeurs de α pour [T] soit un glisseur.

SHOTON

Scanné avec CamScanner

[T] est glisseur $\Rightarrow \begin{cases} \vec{R} \neq \vec{0} \\ \frac{I}{(T)} = 0 = \vec{M}_0 \cdot \vec{R} \end{cases}$

$\Leftarrow \vec{R} \neq \vec{0} \Rightarrow \alpha \neq k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$.

$-\vec{M}_0 \cdot \vec{R} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} -2d\sin\alpha \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2\cos\alpha \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$= -4d^2 \sin\alpha\cos\alpha$.

$\Rightarrow -4d^2 \sin\alpha\cos\alpha = 0$

$\Rightarrow \alpha = 0$ ou $-4\sin\alpha\cos\alpha = 0$

(La linéarisation $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$)

Alors $\alpha =$ ou $\sin 2\alpha = 0$

$2\alpha = k'\pi, \quad k' \in \mathbb{Z}$

$\begin{cases} \alpha = k'\pi/2, & k' \in \mathbb{Z} \\ \alpha \neq k\pi, & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

$\alpha = k'\pi/2, \quad k' \in \mathbb{Z}$

$k' = 2p$: $\alpha = p'\pi, \quad p \in \mathbb{Z}$

$k' = 2p+1$: $\alpha = \left(\frac{2p+1}{2}\right)\pi, \quad p \in \mathbb{Z}$

Les valeurs de α pour que [T] est glisseur sont $\alpha = \left(\frac{2p+1}{2}\right)\pi, \quad p \in \mathbb{Z}$.

autre méthode

$\rightarrow \vec{R} \neq \vec{0} \Rightarrow \sin\alpha \neq 0$ et $\alpha \neq 0$

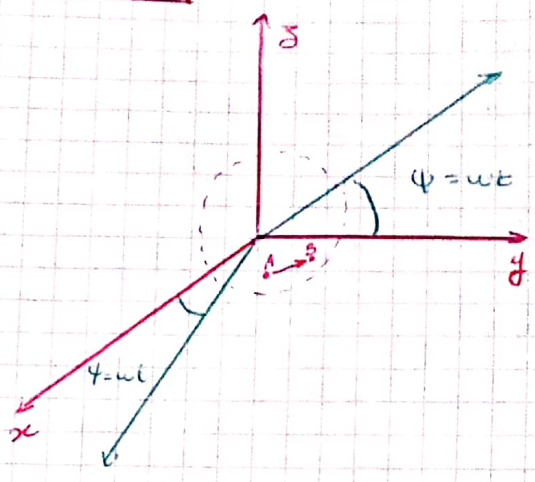
$\Rightarrow -4d^2 \sin\alpha\cos\alpha = 0$

$\Rightarrow \cos\alpha = 0$

$\alpha = \pi/2 + k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$

$\alpha = \left(\frac{2p+1}{2}\right)\pi \quad k \in \mathbb{Z}$.

Exercice 4



Le repère R' est mobile et lié avec (S') et R est fixe.

$\vec{AB}$ = cte par rapport R'

$\vec{AB}$ n'est pas constant /R.

1- On montre que le champ de vecteur de la vitesse de $(S')/R$ est un champ isymétrique

- Soient A et B deux points de (S)

$\frac{d\vec{AB}}{dt}/R = \frac{d\vec{AB}}{dt}/R' + \vec{\Omega}(R'/R) \wedge \vec{AB}$ (F_1)

$\vec{AB} = \vec{AO} + \vec{OB} = -\vec{OA} + \vec{OB}$

on remplace dans (F_1) on trouve

$\frac{d\vec{OB}}{dt}/R - \frac{d\vec{OA}}{dt}/R = \vec{\Omega}(R/R') \wedge \vec{AB}$

$\vec{V}(B/R) - \vec{V}(A/R) = \vec{\Omega}(R'/R) \wedge \vec{AB}$

$\vec{V}(B/R) = \vec{V}(A/R) + \vec{\Omega}(R'/R) \wedge \vec{AB}$

Donc, le champ de vecteurs de la vitesse de $(S)/R$ vérifie la propriété d'antisymétrique, alors est un champ antisymétrique, elle est représentable par un torseur qui

Scanné avec CamScanner

s'appelle torseur cinématique noté $[V]$

$$[V] = \begin{pmatrix} \vec{\Omega}(R'/R) \\ \vec{V} \end{pmatrix}, \quad \vec{\Omega} = \dot{\psi}\vec{x}$$

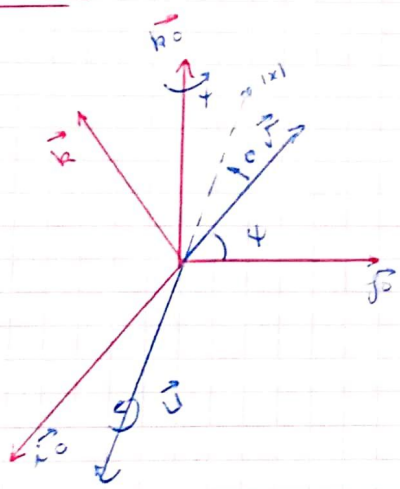
2/- $[V]_G = \begin{pmatrix} \omega \vec{k} \\ \vec{V}_G = \vec{V}(0/R) = \vec{0} \end{pmatrix}$

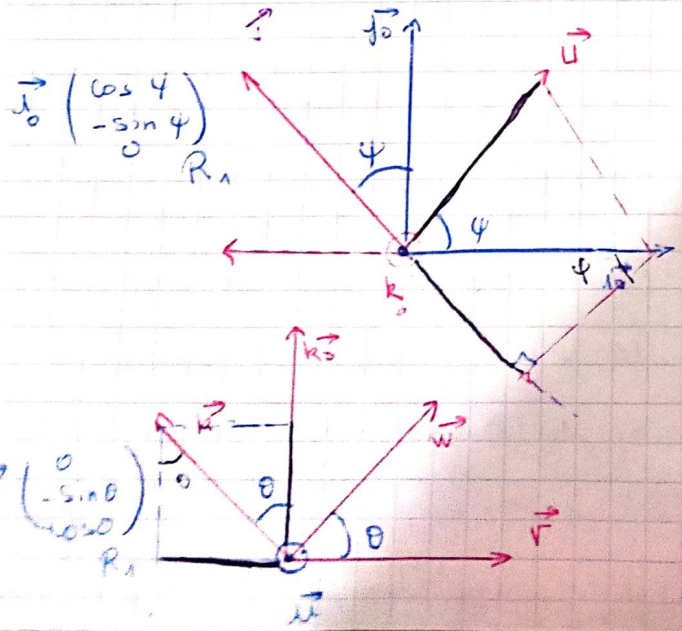
3/- $\vec{V}(0/R) = \vec{0}$ alors Ω c à l'axe central et $\omega\vec{k}$ est le vecteur directeur de l'axe central

① donc l'axe centrale est l'axe $(O\vec{J})$.

- Tous les points de l'axe centrale dont le moment est nul.

Exercice 5 :





$$\vec{M_B} = \vec{M_O} + \vec{R} \wedge \vec{OB}$$

$$\vec{OB}\begin{pmatrix}0\\-l\sin\theta\\l\cos\theta\end{pmatrix}_{R_1} = -l\vec{k}$$

$$\vec{M_O}\begin{pmatrix}a_1\cos\psi\\-a_1\sin\psi\\0\end{pmatrix}$$

$$\vec{R} = a\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}_{R_1} + b\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}_{R_1} + \begin{pmatrix}0\\-c\sin\theta\\c\cos\theta\end{pmatrix}_{R}$$

$$= \begin{pmatrix}b\\-c\sin\theta\\a+c\cos\theta\end{pmatrix}_{R_1}$$

$$\vec{M_B} = \begin{pmatrix}a_1\cos\psi\\-a_1\sin\psi\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}+b\\-c\sin\theta\\a+c\cos\theta\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}0\\-l\sin\theta\\l\cos\theta\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}a_1\cos\psi\\-a_1\sin\psi\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-c\sin\theta\cdot\cos\theta + la\sin\theta + lc\cos^2\theta\\-bl\cos\theta\\bl\sin\theta\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}a_1\cos\psi + l\cdot a\sin\theta\\-bl\cos\theta - a_1\sin\psi\\-bl\sin\theta\end{pmatrix}_{R_1(\vec{O},\vec{u},\vec{v})}$$

2/- On montre que si P∈ à l'axe centrale il vérifie.

$$\vec{OP} = \frac{\alpha\vec{U} + \beta\vec{V} + \gamma\vec{k_0}}{a^2 + b^2 + c^2 + 2ac\cos\theta}$$

P∈ à l'axe centrale donc $\vec{M_P}$ est colinéaire avec $\vec{R}$ ($\vec{R} // \vec{M_P}$) et $\vec{R} \wedge \vec{M_P} = \vec{0}$ (Eq1)

$$\vec{M_P} = \vec{M_O} + \vec{R} \wedge \vec{OP}$$

on remplace dans (Eq1) en obtenant

$$\vec{R} \wedge (\vec{M_O} + \vec{R} \wedge \vec{OP}) = \vec{0}$$

Scanné avec CamScanner

(Eq2) $\vec{R} \wedge \vec{M_0} + \vec{R} \wedge (\vec{R} \wedge \vec{OP}) = \vec{0}$

$\vec{A} \wedge (\vec{B} \wedge \vec{C}) = (\vec{A}\cdot\vec{C})\vec{B} - (\vec{A}\cdot\vec{B})\vec{C}$

on applique pour :

$\vec{R} \wedge (\vec{R} \wedge \vec{OP}) = (\vec{R}\cdot\vec{OP})\vec{R} - R^2\vec{OP}$

→ on remplace dans (Eq2)

on trouve :

$\vec{R} \wedge \vec{M_0} + (\vec{R}\cdot\vec{OP})\vec{R} - R^2\vec{OP} = \vec{0}$

on pose $\mu = \vec{R}\cdot\vec{OP} \in \mathbb{R}$

$\vec{R} \wedge \vec{M_0} + \mu\vec{R} - R^2\vec{OP} = \vec{0}$

$\Rightarrow -R^2\vec{OP} = -\vec{R} \wedge \vec{M_0} - \mu\vec{R}$

$\Rightarrow \vec{OP} = \frac{\vec{R} \wedge \vec{M_0}}{R^2} + \frac{\mu}{R^2}\vec{R}$

on pose $\lambda = \frac{\mu}{R^2}$ en obtenant

$\vec{OP} = \frac{\vec{R} \wedge \vec{M_0}}{R^2} + \lambda\vec{R}, \lambda \in \mathbb{R}$

$R^2 = b^2 + (c\sin\theta)^2 + (a + c\cos\theta)^2$

$\vec{R} = \begin{pmatrix} b \\ -c\sin\theta \\ a + c\cos\theta \end{pmatrix}$

$= b^2 + c^2 + a^2 + 2ac\cos\theta$

$\vec{R} \wedge \vec{M_0} = \begin{pmatrix} b \\ -c\sin\theta \\ a + c\cos\theta \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} a_1\cos\psi \\ -a_1\sin\psi \\ 0 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} a_1\sin\psi\,(a + c\cos\theta) \\ a_1\cos\psi\,(a + c\cos\theta) \\ -b a_1\sin\psi + c a_1\sin\theta\cos\psi \end{pmatrix}_{R_1(\vec{u},\vec{v},\vec{k})}$

En fin :

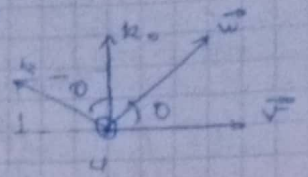
$\vec{OP} = \frac{\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{k_0}}{a^2 + b^2 + c^2 + 2ac\cos\theta} + \lambda\vec{R}, \lambda \in \mathbb{R}$

$\begin{cases} \alpha = a_1\sin\psi\,(a + c\cos\theta) \\ \beta = a_1\cos\psi\,(a + c\cos\theta) \\ \gamma = -b a_1\sin\psi + c a_1\sin\theta\cos\psi \end{cases}$

on peut remplacer $\vec{k_0}$ par

$\vec{k} = -\sin\theta\,\vec{v} + \cos\theta\,\vec{k_0}$

$\vec{k_0} = \frac{\vec{k} + \sin\theta\,\vec{v}}{\cos\theta}$



Série N°2

Ex1 :

1/- Le nombre de degré de la tige AH est 1 puisque AH fait fait seulement un mvt de rotation suivant l'axe $(O\vec{k})$

2/- la roue fait 3 mvts :

- rotation autour de la tige
- translation circulaire
- translation rectiligne suivant la tige

→ donc le nombre de degré de la boule est égale 3.

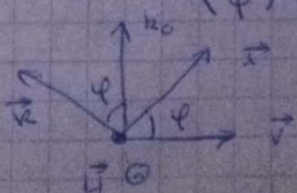
3/- Le vecteur de rotation de la tige par rapport en R_0 est :

$\vec{\Omega}(\text{tige}/R_0) = \vec{\Omega}(R/R_0) = \dot{\psi}\vec{k_0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{pmatrix}_{R_0}$

4/- Le vecteur de rotation de la roue par rapport à R_0 est :

$\vec{\Omega}(\text{roue}/R_0) = \vec{\Omega}(R_2/R_1) + \vec{\Omega}(R_1/R_0)$

$= \dot{\ell}\vec{u} + \dot{\psi}\vec{k_0} = \begin{pmatrix} \dot{\ell} \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{pmatrix}_{R_1}$



Scanné avec CamScanner

5/- $\vec{V}(C/R_0) = \frac{d\vec{OC}}{dt}/R_0$

$= \frac{d\vec{OH}}{dt}/R_0 + \frac{d\vec{HC}}{dt}/R_0$ chal

$\vec{OH} = d\vec{e}/R_0$

$\frac{d\vec{x}}{dt}/R_0 = \frac{d\vec{x}}{dt}/R_1 + \vec{\Omega}(R_1/R_0) \wedge \vec{x}$.

$= 0 + \frac{d\vec{HC}}{dt}/R_0$

$= \frac{d\vec{HC}}{dt}/R_1 + \vec{\Omega}(\frac{R_1}{R_0}) \wedge \vec{HC}$

$\vec{V}(C/R_0) = -e\vec{u} + \begin{pmatrix}0\\0\\\dot\varphi\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}-e\\0\\0\end{pmatrix}$

$\begin{cases}\vec{HC} = -e\vec{u} \\ \frac{d\vec{AC}}{dt}/R_1 = \frac{d(e\vec{u})}{dt}/R_1 = -\dot e\vec{u}\end{cases}$

$\vec{V}(C/R_0) = \begin{pmatrix}-\dot e\\0\\0\end{pmatrix}_{R_1} + \begin{pmatrix}0\\-e\dot\varphi\\0\end{pmatrix}_{R_1}$

$= \begin{pmatrix}-\dot e\\-e\dot\varphi\\0\end{pmatrix} = -\dot e\vec{u} - e\dot\varphi\vec{v}$

$\vec{\gamma}(C/R_0) = \frac{d\vec{V}(C/R_0)}{dt}/R_0 =$

$= -\frac{d(\dot e\vec{u})}{dt}/R_0 - \frac{d(e\dot\varphi\vec{v})}{dt}/R_0$

$\frac{d(\dot e\vec{u})}{dt}/R_0 = \frac{d\,e\vec{u}}{dt}/R_1 + \vec{\Omega}(R_1/R_0) \wedge (\dot e\vec{u})$

$= \ddot e\vec{u} + \begin{pmatrix}0\\0\\\dot\varphi\end{pmatrix}_{R_1} \wedge \begin{pmatrix}\dot e\\0\\0\end{pmatrix}_{R_1}$

$= \begin{pmatrix}\ddot e\\0\\0\end{pmatrix}_{R_1} + \begin{pmatrix}0\\\dot e\dot\varphi\\0\end{pmatrix}_{R_0} = \begin{pmatrix}\ddot e\\\dot e\dot\varphi\\0\end{pmatrix}_{R_1}$

$\frac{d(e\dot\varphi\vec{v})}{dt}/R_0 = \frac{d(e\dot\varphi\vec{v})}{dt}/R_1 + \vec{\Omega}(R_1/R_0) \wedge (e\dot\varphi\vec{v})$

$= \begin{pmatrix}0\\0\\\dot\varphi\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}0\\e\dot\varphi\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\0\\\dot\varphi\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}0\\e\dot\varphi\\0\end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix}0\\\dot e\dot\varphi + e\ddot\varphi\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\0\\\dot\varphi\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}0\\e\dot\varphi\\0\end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix}0\\\dot e\dot\varphi - e\ddot\varphi\\0\end{pmatrix}_{R_1} + \begin{pmatrix}-e\dot\varphi^2\\0\\0\end{pmatrix}_{R_1}$

$= \begin{pmatrix}-e\dot\varphi^2\\\dot e\dot\varphi + e\ddot\varphi\\0\end{pmatrix} = -e\dot\varphi^2 + (\dot e\dot\varphi + e\ddot\varphi)$

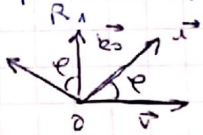
donc :

$\vec{\gamma}(C/R_0) = -\begin{pmatrix}\ddot e\\\dot e\dot\varphi\\0\end{pmatrix}_{R_1} - \begin{pmatrix}-e\dot\varphi^2\\\dot e\dot\varphi + e\ddot\varphi\\0\end{pmatrix}_{R_1}$

$= \begin{pmatrix}-\ddot e - e\dot\varphi^2\\-2\dot e\dot\varphi - e\ddot\varphi\\0\end{pmatrix}_{R_1}$

6/- $\vec{V}(M/R_0) = \vec{V}(C/R_0) + \vec{\Omega}(R_1/R_0) \wedge \vec{CM}$

$= \begin{pmatrix}-\dot e\\-e\dot\varphi\\0\end{pmatrix}_{R_1} + \begin{pmatrix}\dot\varphi\\0\\\dot\psi\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}0\\r\cos\theta\\r\sin\theta\end{pmatrix}$



$\vec{CM} = r\vec{i}$

$= \begin{pmatrix}-\dot e\\-e\dot\varphi\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-\dot\psi r\cos\theta\\-\dot e r\sin\theta\\\dot\theta r\cos\theta\end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix}-\dot e - \dot\psi r\cos\theta\\-e\dot\varphi - \dot\theta r\sin\theta\\\dot\theta r\cos\theta\end{pmatrix}$

* $\vec{\gamma}(M/R_0) = \vec{\gamma}_e(M/R_0) + \vec{\gamma}_r(M/R_2) + \vec{\gamma}_c(R_2/R_0)$ (e : entraînement)

→ loi de composition.

On choisit le repère R_2 comme un repère relatif

$\vec{\gamma}_r(M/R_2) = \frac{d\vec{V}(M/R_2)}{dt}/R_2 = \vec{0}$ (car M est fixe dans R_2)

$\vec{\gamma}_c(R_2/R_0) = 2\cdot\vec{\Omega}(R_2/\ldots) \wedge \vec{V}(M/\ldots)$

Scanné avec CamScanner

$$\vec{t}\left(M/R_0\right) = \vec{t}\left(C/R_0\right) + \frac{d\vec{\Omega}\left(R_1/R_0\right)}{dt}\wedge \vec{CM} + \vec{\Omega}\left(R_1/R_0\right)\wedge\left(\vec{\Omega}\left(R_1/R_0\right)\wedge\vec{CM}\right)$$

$$\vec{\Omega}\wedge\left(\vec{\Omega}\wedge\vec{CM}\right) = \left(\vec{\Omega}\cdot\vec{CM}\right)\vec{\Omega} - \Omega^2\vec{CM}$$

$$\vec{t}\left(C/R_0\right) = \begin{pmatrix} -\dot{\rho} + \rho\dot{\varphi}^2 \\ -\rho\ddot{\varphi} - 2\dot{\rho}\dot{\varphi} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{CM} = r\vec{i}\ \Big|\ \begin{matrix} 0 \\ r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{matrix}\Big)_{R_1}$$

$$\frac{d\vec{u}}{dt}/R_0 = \frac{d\vec{u}}{dt}/R_1 + \vec{\Omega}\left(R_1/R_0\right)\wedge\vec{u}$$

$$= \vec{0} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix}_{R_1}\wedge\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \dot{\varphi}\vec{v}$$

$$\frac{d\vec{\Omega}}{dt}/R_0 \wedge \vec{CM} = \frac{d}{dt}\left(\dot{\theta}\vec{u} + \dot{\varphi}\vec{k_0}\right)/R_0 \wedge \vec{CM}$$

$$= \left(\ddot{\theta}\vec{u} + \dot{\theta}\dot{\varphi}\vec{v} + \dot{\varphi}\vec{k_0}\right)\wedge\vec{CM}$$

$$= \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\theta}\dot{\varphi} \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix}_{R_1}\wedge\begin{pmatrix} 0 \\ r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix}_{R_1}$$

$$= \begin{pmatrix} \dot{\theta}\dot{\varphi} r\sin\theta - \ddot{\varphi} r\cos\theta \\ -\dot{\theta} r\sin\theta \\ \dot{\theta} r\cos\theta \end{pmatrix}_{R_1}$$

$$\vec{A}\wedge\left(\vec{B}\wedge\vec{C}\right) = \left(\vec{A}\cdot\vec{C}\right)\vec{B} - \left(\vec{A}\cdot\vec{B}\right)\vec{C}$$

$$\vec{\Omega}\wedge\vec{\Omega}\wedge\vec{CM} = \left(\vec{\Omega}\cdot\vec{CM}\right)\vec{\Omega} - \Omega^2\vec{CM}$$

$$= \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ 0 \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix}_{R_1}\vec{\Omega} - \Omega^2\vec{CM}$$

$$= \dot{\varphi} r\sin\theta\begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ 0 \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix} - \left(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2\right)\begin{pmatrix} 0 \\ r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \dot{\varphi}\dot{\theta} r\sin\theta \\ -\left(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2\right) r\cos\theta \\ -\dot{\varphi}^2 r\sin\theta \end{pmatrix}_{R_1}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = ax + by + cz$$

$$\vec{t}\left(M/R_0\right) = \begin{pmatrix} -\ddot{\rho} + \rho\dot{\varphi}^2 + 2\dot{\rho}\dot{\varphi} r\sin\theta - \ddot{\varphi} r\cos\theta \\ -2\rho\dot{\rho}\dot{\varphi} - \rho\ddot{\varphi} - \ddot{\rho} r\sin\theta - \left(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2\right) r\sin\theta \\ \ddot{\theta} r\cos\theta - \dot{\theta}^2 r\sin\theta \end{pmatrix}$$

7/- $\vec{V}\left(I\in D/R_0\right) = ?$

$(I$ et $C) \in D$ donc

$$V\left(I\in D/R_0\right) = \vec{V}\left(C/R_0\right) + \vec{\Omega}\left(R_1/R_0\right)\wedge\vec{CI}$$

on a $\vec{V}\left(C/R_0\right) = \begin{pmatrix} -\dot{\rho} \\ -\rho\dot{\varphi} \\ 0 \end{pmatrix}_{(\vec{u},\vec{v},\vec{k_2})}$

et $\vec{\Omega}\left(R_2/R_0\right) = \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ 0 \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix}_{(\vec{u},\vec{v},\vec{k_2})}$

et $\vec{CI} = -R\vec{k_0}$

$$\rightarrow V\left(I\in D/R_0\right) = \begin{pmatrix} -\dot{\rho} \\ -\rho\dot{\varphi} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ 0 \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix}\wedge\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ -R \end{matrix}\Big)_{R_1}$$

$$= \begin{pmatrix} -\dot{\rho} \\ -\rho\dot{\varphi} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -R\dot{\theta} \\ 0 \end{pmatrix}_{R_1}$$

$$= \begin{pmatrix} -\dot{\rho} \\ -\rho\dot{\varphi} - R\dot{\theta} \\ 0 \end{pmatrix}_{(\vec{u},\vec{v},\vec{k_0})}$$

$$\vec{V}\left(I/R_2\right) = \frac{d\vec{CI}}{dt}/R_2$$

$$= -R\frac{d\vec{k_0}}{dt}/R_2 = -R\dot{\theta}\vec{v}$$

$$\frac{d\vec{k_0}}{dt}/R_2 = \frac{d\vec{k_0}}{dt}/R_0 + \vec{\Omega}\left(R_0/R_2\right)\wedge\vec{k_0}$$

$$= \vec{0} - \vec{\Omega}\left(R_2/R_0\right)\wedge\vec{k_0}$$

$$= -\begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ 0 \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \dot{\theta}\vec{v}$$

$$\vec{\Omega}\left(R_0/R_2\right) = -\vec{\Omega}\left(R_2/R_0\right)$$

$$\vec{\Omega}\left(R_2/R_1\right) = -\vec{\Omega}\left(R_1/R_2\right)$$

Scanné avec CamScanner

8/- $\vec{V}(I/R_0) = \frac{d\vec{OI}}{dt}\Big|_{R_0} = \frac{d\vec{HC}}{dt}\Big|_{R_0}$

$(\vec{OI} = \vec{HC} = -\rho\vec{u})$

alors $\frac{d\vec{HC}}{dt}\Big|_{R_0} = -\dot{\rho}\vec{v} + \rho\frac{d\vec{u}}{dt}\Big|_{R_0}$

$= -\dot{\rho}\vec{u} - \rho\dot{\psi}\vec{v}$

$= \begin{pmatrix} -\dot{\rho} \\ -\rho\dot{\psi} \\ 0 \end{pmatrix}_{(\vec{u},\vec{v},\vec{k_0})}$

autre méthode : avec la decomposition de la vitesse

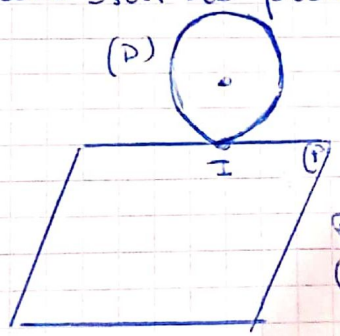
$\vec{V}(I/R_0) = \vec{V}(I/R_2) + \vec{V}(I\in D/R_0)$

vetesse relative — v. d'entrainement

$= \begin{pmatrix} 0 \\ -R\dot{\varphi} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\dot{\rho} \\ -\rho\dot{\psi} + R\dot{\varphi} \\ 0 \end{pmatrix}_{R_1}$

$= \begin{pmatrix} -\dot{\rho} \\ -\rho\dot{\psi} \\ 0 \end{pmatrix}_{R_1}$

9/- Condition de roulement sans glissement de (D), la roue se roule sur le plan $(\vec{i_0}\, o\, \vec{j_0})$



P le plan $(\vec{i_0}\, o\, \vec{j_0})$

$\vec{V}_g(D/P) = \vec{V}(I\in D/R_0) - \vec{V}(I\in P/R_0)$

$\vec{V}(I\in P/R_0) = \vec{0}$ (les pts de P sont fixe/R_0)

$\vec{V}_g(D/P) = \vec{V}(I\in D/R_0)$.

→ La condition de roulement sans glissement de D est.

$\vec{V}_g(D/P) = \vec{V}(I\in D/R_0) = \vec{0}$

$\Rightarrow \begin{vmatrix} -\dot{\rho} \\ -\rho\dot{\psi} + R\dot{\varphi} \\ 0 \end{vmatrix}_{(\vec{u},\vec{v},\vec{k_0})} = \vec{0}$

$\Rightarrow \begin{cases} \dot{\rho} = 0 \\ -\rho\dot{\psi} + R\dot{\varphi} = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} \rho = cte \\ \rho/R = \varphi/\psi \end{cases}$

Exercice 2 :

1/- NDL (tige) = 1

et $\vec{\Omega}(\text{tige}/R_0) = \dot{\psi}\vec{k_0}$

NDL (Disque) = 2 (Disque fait un rotation, translation circulaire) $\vec{\Omega}(\text{tige}/R_0) = \dot{\psi}k_0 = \vec{\Omega}(R_T/R_0)$

et $\vec{\Omega}(\text{Disque}/R_0) = \vec{\Omega}(R_D/R_0)$

$= \vec{\Omega}(R_D/R_T) + \vec{\Omega}(R_T/R_0)$

$= \dot{\varphi}\vec{k_0} + \dot{\psi}\vec{k_0}$

$= (\dot{\varphi} + \dot{\psi})\vec{k_0}$

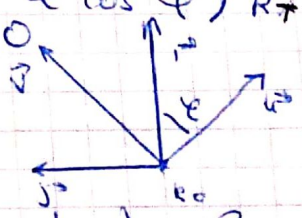
2/- $\vec{V}(P/R_T) = ?$

cet P ∈ disque.

$\vec{V}(P/R_T) = \vec{V}(C/R_T) + \vec{\Omega}(R_D/R_T) \wedge \vec{CP}$

$= \vec{0} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix}_{R_1} \wedge \begin{pmatrix} R\cos\varphi \\ R\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}_{R_T}$

$= \begin{pmatrix} -\dot{\varphi}R\sin\varphi \\ R\dot{\varphi}\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}_{R_T}$



3- $\vec{V}(P/R_0) = ?$

on a 2 méthode : la dérivé la composit

→ Avec la ...

vitesse ...

choisit ...

$\vec{OC}$ =

l : long...

$\vec{V}(P/...$

$\vec{V}_e(P/...$

$= \frac{d\vec{OC}}{dt}$

$= d...$

$=$

$V_e($

$\vec{V}$

$+$

$=$

4/-

$\vec{V}($

$=$

- Avec la loi de composition de la vitesse de la vitesse, on choisit R_T comme repère relatif.

$\overrightarrow{OC} = l\vec{u}$ (R_0 = absolu)

l : longueur de la tige

$\vec{V}(P/R_0) = V_e(P/R_0) + \vec{V}_{cr}(P/R_T)$ (cr = relative)

$V_e(P/R_0) = \vec{V}(C/R_0) + \vec{\Omega}(R_T/R_0) \wedge \overrightarrow{CP}$

$= \frac{d\overrightarrow{OC}}{dt}/R_0 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{pmatrix}_{R_1} \wedge \begin{pmatrix} R\cos\varphi \\ R\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$

$= \frac{d\,l\vec{u}}{dt}/R_0 + \begin{pmatrix} -\dot{\psi} R\sin\varphi \\ +R\dot{\psi}\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 0 \\ l\dot{\psi} \\ 0 \end{pmatrix}_R + \begin{pmatrix} -\dot{\varphi} R\sin\varphi \\ R\dot{\psi}\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$

$V_e(P/R_0) = \begin{pmatrix} -\dot{\psi}\sin\varphi \\ R\dot{\psi} + R\dot{\varphi}\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}_{R_1}$

$\vec{V}(P/R_0) = \begin{pmatrix} -\dot{\psi} R\sin\varphi \\ l\dot{\psi} + R\dot{\psi}\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}_{R_1} + \begin{pmatrix} -\dot{\varphi} R\sin\varphi \\ R\dot{\varphi}\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}_{R_1}$

$= \begin{pmatrix} -\dot{\psi} R\sin\varphi - \dot{\varphi} R\sin\varphi \\ l\dot{\psi} + \dot{\psi}\cos\varphi + R\dot{\varphi}\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}_{R_1}$

4/- $[\vec{V}(\text{cône}/R_0)]_C = \begin{pmatrix} \vec{\Omega}(\text{cône}/R_0) = \dot{\psi}\vec{k}_0 \\ \vec{V}(C/R_0) = \frac{d\overrightarrow{OC}}{dt}/R_0 = l\dot{\psi}\vec{u} \end{pmatrix}$

$\vec{V}(C/R_0) = \frac{d\overrightarrow{OC}}{dt}/R_0 = l\frac{d\vec{u}}{dt}/R_0$

$= l\left(\frac{d\vec{u}}{dt}/R_1 + \vec{\Omega}(R_1/R_0) \wedge \vec{u}\right)$

$= l\left(\vec{0} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{pmatrix}_{R_T} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$

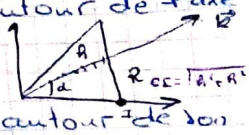
$= l\begin{pmatrix} 0 \\ \dot{\psi} \\ 0 \end{pmatrix}_{R_T} = l\dot{\psi}\vec{v}$

5/- $[V(\text{disque}/R_0)]_C = \begin{pmatrix} \vec{\Omega}\left(\frac{\text{Disque}}{R_0}\right) = (\dot{\varphi}+\dot{\psi})\vec{k}_0 \\ \vec{V}(C/R_0) = l\dot{\psi}\vec{v} \end{pmatrix}$

Exercice III

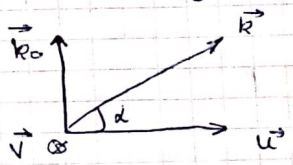
1/- Le cône fait 2 mvts de rotation

* Mvt de rotation autour de l'axe $(O, \vec{k}_0)$ par ψ.



* Mvt de rotation autour de son axe de révolution $(O, \vec{k})$, par conséquent, $NDL(\text{cône}) = 2$.

2/- $\vec{\Omega}(\text{cône}/R_0) = \dot{\psi}\vec{k}_0 + \dot{\varphi}\vec{k}$



$\vec{k} = \cos\alpha\,\vec{u} + \sin\alpha\,\vec{k}_0$

$\vec{\Omega}(\text{cône}/R_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{pmatrix}_R + \begin{pmatrix} \dot{\varphi}\cos\alpha \\ 0 \\ \dot{\varphi}\sin\alpha \end{pmatrix}_R$

$= \begin{pmatrix} \dot{\varphi}\cos\alpha \\ 0 \\ \dot{\psi} + \dot{\varphi}\sin\alpha \end{pmatrix}_R$

3/- $\vec{V}(I \in S/R_0) = ?$

I clo $\in (S)$ donc

$\vec{V}(I/R_0) = \vec{V}(O/R_0) + \vec{\Omega}(\text{cône}/R_0) \wedge \overrightarrow{OI}$

$= \vec{0} + \begin{pmatrix} \dot{\varphi}\cos\alpha \\ 0 \\ \dot{\psi} + \dot{\varphi}\sin\alpha \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \sqrt{R^2+R^2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{OI} = OI\vec{u}$

$= \sqrt{R^2+R^2}\,\vec{u}$

$V(I/R_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ \left(\sqrt{R^2+R^2}\right)(\dot{\psi} + \dot{\varphi}\sin\alpha) \\ 0 \end{pmatrix}_R$

4/- la condition de roulement sans glissement du cône.

.. le cône se roule dans le plan $\pi(O, \vec{i}_0, \vec{j}_0)$ donc :

$\vec{V}g(S/\pi) = \vec{V}(I \in S/R_0) - \vec{V}(I \in \pi/R_0)$

$(\vec{V}(I \in \pi/R_0) = \vec{0}$ car le plan π fixe dans R_0)

Scanné avec CamScanner

Alors $\vec{V}_g(S/\pi) = \vec{V}(I \in (S)/R_0)$

- Le cône se roule sans glissement.

$\Rightarrow \vec{V}_g(S/\pi) = \vec{V}(I \in (S)/R_0) = \vec{0}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{h^2+R^2}\,(\dot{\varphi} + \dot{\epsilon}\sin\alpha) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Enfin : $\sqrt{h^2+R^2}\,(\dot{\varphi} + \dot{\epsilon}\sin\alpha) = 0$

$\Rightarrow \dot{\varphi} + \dot{\epsilon}\sin\alpha = 0$

$\Rightarrow \dot{\varphi} = -\dot{\epsilon}\sin\alpha$

$\begin{cases} \tan\alpha = R/h \\ \alpha = \operatorname{arctg}(R/h) \end{cases}$

ou bien $\sin\alpha = -\dot{\varphi}/\dot{\epsilon}$

$\sin\left(\operatorname{Arctg}(R/h)\right) = -\dot{\varphi}/\dot{\epsilon}$

Fin

SHOT ON OPPO

Scanné avec CamScanner

Application : Dynamique.

Exercice 1 :

Le système = $\left\{ \begin{array}{l} \text{disque (D)} \\ M : \text{masse} \\ a : \text{Rayon} \\ A : \text{centre d'inertie} \end{array} \right\} \cup \left\{ \begin{array}{l} \text{tige} \\ m \\ 2L \\ G \end{array} \right\}$

Les repères :

- $R_0 (O, \vec{I}_0, \vec{j}_0, \vec{k}_0)$
- $R_D (A, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est lié avec (D)
- $R_T (G, \vec{u}, \vec{v}, \vec{k}_0)$ est lié avec (T)
- (D) se roule sur le sol avec $\vec{V_g} (D/_{sol}) = \vec{v}\,\vec{i}_0$

I : Le point de contact entre (D) et sol.

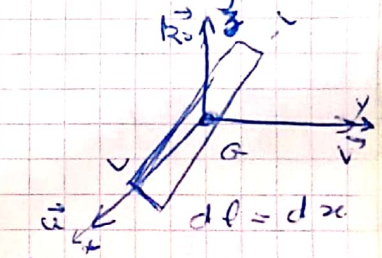
1/- NDL (T) = 2 et $\vec{\Omega} (T/_{R_0}) = \alpha \vec{k}_0$

NDL (D) = 2 et $\vec{\Omega} (D/_{R_0}) = \dot{\theta} \vec{k}_0$

2/. La matrice d'inertie de (D)

Ona R_T est un repère principale car $(G, \vec{u})$ est un axe de révolution de la tige, alors la matrice s'écrit sous la forme :

$$\Pi_G (T) = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & B \end{pmatrix}_{(\vec{u}, \vec{v}, \vec{k}_0)}$$



$A = \frac{I}{(G,\vec{u})} = \frac{I}{G\vec{k}_0} = \int_{dx} (y^2 + z^2)\, dm$

$\boxed{A = 0}$

(T) est suivant $\vec{u}$

Donc $y = z = 0$

$B = \frac{I}{(G,\vec{v})} = \int (z^2 + x^2)\, dm = \int x^2 dm$

$= \frac{m}{2L} \int_{-L}^{L} x^2 dx$ x

(Car $\frac{dm}{dl} = \frac{m}{2L}$

$\boxed{B = \frac{mL^2}{3}}$

$dm = \frac{m}{2L} dl$

$\left(dm = \frac{m}{2L} dx\right)$

- $R_D (A, \vec{I}, \vec{j}, \vec{k})$ est un repère principale pour le disque (D) Car l'axe $(A, \vec{k}_0)$ est un repère axe de révolution du disque

⇒ La matrice d'inertie du disque au pt A est diagonale alors

$$\Pi_A (D) = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & B \end{pmatrix}$$

ona. $A = \frac{I}{(A,I)} = \frac{I}{(A,\vec{i})} = \int (y^2 + z^2)\, dm = \int (x^2 + z^2)\, dm$

Scanné avec CamScanner

SHOT ON OPPO

or $z=0 \Rightarrow A = \int y^2 dm = \int x^2 dm$

$B = I_{(A,\vec{R_0})} = \int (x^2+y^2) dm$

$(\sigma = \frac{M}{S}) = \int r^2 dm$

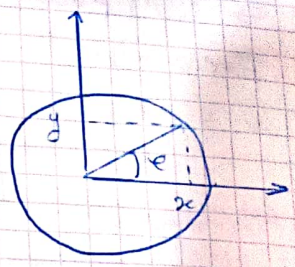
$\Leftrightarrow B = \frac{M}{\pi a^2} \times 2\pi \int_0^a r^3 dr \int r^2 ds = \frac{M}{S} \int_0^{2\pi} \int_0^a r^3 dr\, d\theta$

$= \frac{M 2\pi}{\pi a^2} \times \frac{1}{4} a^4 = \frac{Ma^2}{2}$

$A + A = \int (x^2+y^2) dm = B \Rightarrow A = \frac{B}{2}$

alors $A = \frac{Ma^2}{4}$

d'où $\mathcal{T}_A(D) = \begin{pmatrix} Ma^2/4 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{Ma^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{Ma^2}{2} \end{pmatrix}$



$x = r\cos\theta$
$y = r\sin\theta$
$z = 0$
$ds = r\,dr\,d\theta$
$0 \le \theta \le 2\pi$ et $0 \le r \le a$

Q3 et 5 :

$[C(D/R_0)] = \begin{pmatrix} \vec{P}(D/R_0) \\ \mathcal{E}_A(D/R_0) \end{pmatrix}$

- $\vec{P}(D/R_0) = M \vec{V}(A/R_0)$
- $\vec{V}(A/R_0) = \vec{V}\left(\frac{I \in D}{R_0}\right) + \vec{\Omega}(D/R_0) \wedge \vec{IA}$

$\vec{IA} = a\vec{j_0}$ et $\vec{\Omega}(D/R_0) = \dot{\theta}\vec{k_0}$

$\vec{V_g}(D/Sol) = \vec{V}\left(\frac{I \in D}{R_0}\right) - \vec{V}(I \in sol/R_0)$

$= \vec{V}(I \in D/R_0)$

$\vec{V}(I \in D/R_0) = \vec{V}_{P_0}(\vec{V}(I \in sol/R_0)) = \vec{0}$

$\vec{V}(A/R_0) = \begin{pmatrix} V \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ 0 \end{pmatrix}$

$\vec{V}(A/R_0) = \begin{pmatrix} V \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -a\dot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{(i_0,j_0,k_0)} = (V - a\dot{\theta})\vec{i_0}$

$\vec{\mathcal{E}}_A(D/R_0) = \mathcal{T}_A(D) \cdot \vec{\Omega}(D/R_0)$

$= \frac{Ma^2}{4} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}_{(i,j,k_0)} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{pmatrix}_{(\vec{i},\vec{j},\vec{k_0})}$

$\Rightarrow \vec{\mathcal{E}}_C(D/R_0) = Ma^2/2\, \dot{\theta}\vec{k_0}$

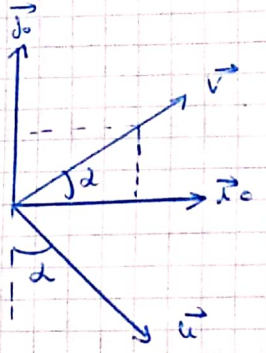
$[C(D/R_0)]_A = \begin{pmatrix} M(V - a\dot{\theta})\vec{i_0} \\ \frac{Ma^2}{2}\dot{\theta}\vec{k_0} \end{pmatrix}$

Scanné avec CamScanner

5- $[D(D/R_0)]_A = \begin{pmatrix} m\vec{v}(A/R_0) \\ \vec{S}_A(D/R_0) \end{pmatrix}$ $(V = cte)$

$= \begin{pmatrix} M \frac{d}{dt}\vec{v}(A/R_0) = -Ma\ddot{\alpha}\vec{i}_0 \\ \vec{S}_A(D/R_0) = \frac{dS_A(D/R_0)}{dt}/_{R_0} = -\frac{Ma^2\ddot{\alpha}}{2}\vec{k}_0 \end{pmatrix}$

6- $[C(T/R_0)]_G = \begin{pmatrix} \vec{P}(T/R_0) = m\vec{v}(G/R_0) \\ \delta_G(T/R) \end{pmatrix}$



$\vec{V}(G/R_0) = \vec{V}(A/R_0) + \Omega(T/R_0) \wedge \vec{AG}$

$= (V - a\dot{\alpha})\vec{i}_0 + \dot{\alpha} L \vec{v}$

$= (V - a\dot{\alpha})\vec{i}_0 + \dot{\alpha} L \vec{v}$

on a $\vec{v} = \sin\alpha \vec{j}_0 + \cos\alpha \vec{i}_0$

D'où $V(G/R_0) = (V - a\dot{\alpha})\vec{i}_0 + \dot{\alpha} L(\sin\alpha \vec{j}_0 + \cos\alpha \vec{i}_0)$.

$\vec{V}(G/R_0) = (V - a\dot{\alpha} + \dot{\alpha} L\cos\alpha)\vec{i}_0 + \dot{\alpha} L \sin\alpha \vec{j}_0$

Calculons $\delta_G(T/R_0)$

On sait que $\delta_G(T/R_0) = \Pi_G \cdot \Omega(T/R_0)$

$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{mL^2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mL^2}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\alpha} \end{pmatrix} = \dot{\alpha} \frac{mL^2}{3} \vec{k}_0$

D'où $[C(T/R_0)] = \begin{pmatrix} \cdots \\ \cdots \end{pmatrix}$.

6/- $[D(T/R_0)] = \begin{pmatrix} m\vec{\delta}(G/R_0) \\ \vec{\delta}_G(T/R_0) \end{pmatrix}$

$\vec{\delta}(G/R_0) = \frac{d}{dt}(\vec{V}(G/R_0))/_{R_0}$

$\frac{d\cos\alpha}{dt} = \frac{d\cos\alpha}{d\alpha}\cdot\frac{d\alpha}{dt} = -\sin\alpha \cdot \dot{\alpha}$

$= \frac{d}{dt}(V - a\dot{\alpha} + \dot{\alpha} L\cos\alpha \vec{i}_0) + \frac{d}{dt}(\dot{\alpha} L \sin\alpha)\vec{j})$

$= (-a\ddot{\alpha} + \ddot{\alpha} L\cos\alpha - L\dot{\alpha}^2\sin\alpha)\vec{i}_0 + (\ddot{\alpha} L\sin\alpha + \dot{\alpha}^2 L\cos\alpha)\vec{j}$.

* $\vec{\delta}(G/R_0) = \begin{pmatrix} -a\ddot{\alpha} + \ddot{\alpha} L\cos\alpha - L\dot{\alpha}^2\sin\alpha \\ -\ddot{\alpha} L\sin\alpha + \dot{\alpha}^2 L\cos\alpha \end{pmatrix}_{(\vec{i}_0, \vec{j}_0, \vec{k}_0)}$ $\left(\frac{d\sin\alpha}{dt} = \dot{\alpha}\cos\alpha\right)$

$\vec{S}(T/R_0) = \frac{d\delta_G(T/R_0)}{dt}/_{R_0} = \frac{mL^2}{3}\ddot{\alpha}\vec{k}_0$

7/ $[Fe(D/R_0)]_A = \begin{pmatrix} \vec{Fe}(D/R_0) \\ M_A(Fe(D/R_0)) \end{pmatrix}$

$\vec{Fe}(D/R_0)$ la somme des actions extérieur appliqué sur

(D).

Scanné avec CamScanner

+ Le système étudié {D}

- $\vec{P_D}$ Poids de disque $\vec{P_D} = \begin{pmatrix} 0 \\ -Mg \\ 0 \end{pmatrix}_{T_0, j_0, k_0}$

- $R_{sol/D}$ Réaction du sol sur D $\vec{R}_{sol/D} \begin{pmatrix} R_x \\ R_y \\ R_z \end{pmatrix}_{(i_0, j_0, k_0)}$

$\vec{L}_{T/D}$ Action de T/D

$$\vec{L}_{T/D} \begin{pmatrix} Lx \\ Ly \\ Lz \end{pmatrix}_{(i_0, j_0, k_0)}$$

$$\vec{Fe}\,(D/R_0) = \vec{L}_{T/D} + \vec{P}_T + \vec{R}_{sol/D}$$

$$= \begin{pmatrix} Lx + Rx \\ Ly - Mg + Ry \\ Rz + Lz \end{pmatrix}_{i_0, j_0}$$

$$\mathcal{M}_A(\vec{Fe}) = \vec{M}_A(\vec{P}_T) + \vec{M}_A(\vec{L}_{T/D}) + \vec{M}(\vec{R}_{sol/D})$$

$$= \vec{AA} \wedge \vec{P}_T + \vec{AA} \wedge \vec{L}_{T/D} + \vec{AI} \wedge \vec{R}_{sol/D}$$

* $\vec{M}_A(\vec{Fe}(D/R_0)) = \vec{0} + \vec{0} + \begin{pmatrix} 0 \\ -a \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} R_x \\ R_y \\ R_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -aR_z \\ 0 \\ aR_x \end{pmatrix}_{(x, j, z)}$

8/- $[Fe(T/R_0)]_G = \begin{pmatrix} Fe\,(T/R_0) \\ M_G(\vec{Fe}\,(I/R_0)) \end{pmatrix}$

* $\vec{Fe}\,(I/R_0)$: la somme des torseurs extérieurs appliquées sur (T).

Les Torseurs extérieures : $\vec{P}_T$: Poids de (T) $\vec{P}_T = \begin{pmatrix} 0 \\ mg \\ 0 \end{pmatrix}$

$\vec{L}_{D/T}$: Action de (D) sur T.

$$\left(\vec{L}_{D/T} = -\vec{L}_{T/D} = \begin{pmatrix} -Lx \\ -Ly \\ -Lz \end{pmatrix}\right)$$

* $Fe(T/R_0) = \vec{P}_T + \vec{L}_{D/T} = \begin{pmatrix} -Lx \\ -Ly - mg \\ -Lz \end{pmatrix}_{(i_0, j_0, k_0)}$

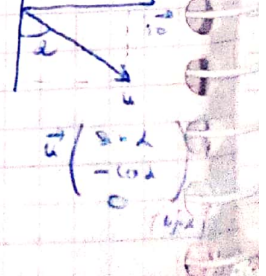
* $M_G(\vec{Fe}(T/R_0)) = \vec{M}(\vec{P}_T) + M_G(\vec{L}_{D/T})$

$$= \vec{GG} \wedge \vec{P}_T + \vec{GA} \wedge \vec{L}_{D/T}$$

$$= 0 - L\vec{u} \wedge \vec{L}_{D/T}$$

$$= \begin{pmatrix} -L\sin\alpha \\ L\cos\alpha \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -Lx \\ -Ly \\ -Lz \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -L\,Lz\cos\alpha \\ -L\,Lz\sin\alpha \\ L.Ly\sin\alpha + Lx.L\cos\alpha \end{pmatrix}$$



Scanné avec CamScanner

3-a/- On applique le PFD pour la tige

$$[Fe(T/R_0)]_G = [D(T/R_0)]_G$$

L'égalité des résultats donne

$$\vec{Fe}(T/R_0) = m\,\vec{\delta}(G/R_0)$$

$$\begin{pmatrix} L_x \\ L_y - mg \\ L_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m(-a\dot{\theta} + L\ddot{\alpha}\cos\alpha - L\dot{\alpha}^2\sin\alpha) \\ m(L\ddot{\alpha}\sin\alpha + L\dot{\alpha}^2\cos\alpha \\ 0 \end{pmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

$$\begin{cases} L_z = 0 \\ L_x = -m(-a\dot{\theta} + L\ddot{\alpha}\cos\alpha - L\dot{\alpha}^2\sin\alpha) \\ L_y = -mg - m(L\ddot{\alpha}\sin\alpha + L\dot{\alpha}^2\cos\alpha \end{cases}$$

3-b/- On applique PFD pour (D)

$$[Fe(D/R_0)]_A = [D(D/R_0)]_A$$

L'égalité des résultats donne

$$\vec{Fe}(D/R_0) = M\,\vec{\delta}(A/R_0)$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} L_x + R_x \\ L_y - Mg + R_y \\ R_z + L_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -Ma\ddot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$R_x = -L_x - Ma\ddot{\theta}$

$R_y = Mg - L_y$

$R_z = 0$

Exercice 3 : (lié a ex 3 TD2).

1 - $\vec{\Omega}(\text{Cone}/R_0) = \begin{pmatrix} \dot{\varphi}\cos\alpha \\ 0 \\ 4+\dot{\varphi}\sin\alpha \end{pmatrix}_R$

2 - Le centre d'inertie du Cone $(x,y,z)_R$

$\vec{OG} = \frac{1}{m}\iiint_V \vec{OM}\, dm$

G appartient a l'axe du Cône $(O,\vec{k})$

donc $x_G = y_G = 0$

$z_G = \frac{1}{m}\iiint_V z\, dm$

Le cône est homogéne $\rho = \frac{m}{V}$

et on a $V = \frac{V_{cylindre}}{3} = \frac{\pi R^2 h}{3}$

$z_G = \frac{1}{\rho . V}\iiint z . \rho . dV = \frac{1}{V}\iiint z\, dV$

$= \frac{1}{V}\int_0^{2\pi}\int_0^h\int_0^{\frac{r^3}{h}} z\, r\, dr\, d\theta\, dz$

avec $dV = r\, dr\, d\theta\, dz$.

$= \frac{1}{V}\frac{2\pi}{2}\int_0^h z\frac{r^2 z^2}{h^2}\, dz$

$= \frac{1}{V}\pi\frac{r^2}{h^2}\frac{h^4}{4} = \frac{3\pi}{\pi R^2 h}\frac{R^2}{h^2}\frac{h^4}{4}$

$z_G = \frac{3}{4}h$

donc $\vec{OG} = \frac{3}{4}h$

3/- Le repere Rcône $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ présente à axe de révolution $(O\vec{k})$ alors c'est le répere principale pour la matrice d'inertie du Cône.

4/- au pt O : La matrice est diagonale

$\Pi_O = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & B \end{pmatrix}_{(\vec{i},\vec{j},\vec{k})}$

$A = \iiint y^2 + z^2 dm = \iiint x^2 + z^2\, dm$

$B = \iiint x^2 + y^2\, dm$.

$B = \iiint x^2 + y^2\, dm = \iiint r^2\, dm$ $\quad \rho = \frac{dm}{dV}$

$= \frac{m}{V}\iiint r^2\, dV = \frac{m}{V}\iiint r^2 r\, d\theta\, dr\, dz$

$= \frac{m}{V}2\pi\int_0^h\int_0^{\frac{r^3}{h}} r^3\, dr\, dz = \frac{m}{V}\frac{2\pi}{4}\frac{r^4}{h^4}\int_0^h z^4\, dz$

$= \frac{m\pi}{2V}\frac{r^4}{h^4}\frac{h^5}{5} = \frac{m\pi 3 r^4 h}{2\times 5\times \pi R^2 h}$ $\quad r = R$

$B = \frac{3mR^2}{10}$

et on a $2A = \iiint x^2 + y^2 + 2z^2\, dm$

$2A = B + 2\iiint z^2\, dm$

$I = \iiint z^2\, dm = \frac{m}{V}\iiint z^2\, dV$

$= \frac{m}{V}2\pi\int_0^h\int_0^{\frac{r^3}{h}} z^2 r\, dr\, dz$

$= \frac{m}{V}\frac{2\pi}{2}\int_0^h z^2\frac{r^2 z^2}{h^2}\, dz$

$= \frac{m}{V}\pi\frac{r^2}{h^2}\frac{h^5}{5} = \frac{3m\pi r^2 h^3}{5\pi R^2 h}$

$I = \frac{3}{5}mh^2$

$\Rightarrow 2A = B + 2I$

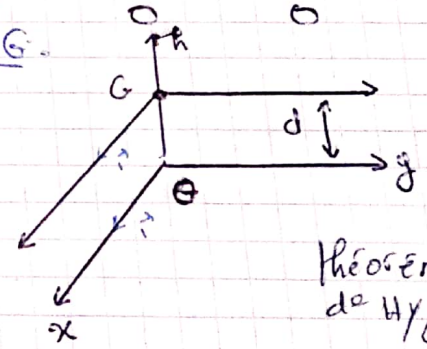
$A = \frac{B}{2} + I$

$A = \frac{3mR^2}{20} + \frac{3}{5}mh^2$

Alors La matrice d'inertie au pt O ds R

$\Pi_O = \begin{pmatrix} \frac{3mR^2}{20} + \frac{3}{5}mh^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3mR^2}{20} + \frac{3}{5}mh^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3mR^2}{10} \end{pmatrix}$

au pt G.



Théorème de Hyghens

$\Pi_G = \begin{pmatrix} A' & 0 & 0 \\ 0 & A' & 0 \\ 0 & 0 & B' \end{pmatrix}$

$A' = I_{(G,\vec{i})} = I_{(G,\vec{j})}$

$B' = I_{(G,\vec{k})}$

$(G,\vec{i})$ et $(O,\vec{i})$ son parallele, Donc

$I_{(O,\vec{i})} = I_{(G,\vec{i})} + md^2$ $\qquad d = OG = \frac{3}{4}h$

$I_{(G,\vec{i})} = I_{(O,\vec{i})} - md^2$

$= \frac{3MR^2}{20} + \frac{3mh^2}{5} - \frac{9h^2M}{16}$

$A' = I_{(G,\vec{i})} = \frac{3MR^2}{20} + \frac{3Mh^2}{80}$

$B' = B_{\pi_O} = \frac{3MR^2}{10}$

Rappel :

Le moment cinétique en G d'un solide

$\vec{\sigma}_G(S/R) = \Pi_G(S)\,\vec{\Omega}(S/R)$

s'expriment en m̂ base.

$\sigma_A(S/R) = m\,\vec{AG} \wedge \vec{V}(A/R) + \Pi_A\,\vec{\Omega}(S/R)$

$E_c = \frac{1}{2} m V_G^2(G/R) + \frac{1}{2}\vec{\Omega}(S/R)\,\Pi_G\,\vec{\Omega}(S/R)$

Le moment dynamique :

$\vec{\delta}_G(S/R) = \frac{d\,\vec{\sigma}_A(S/R)}{dt}\Big/_R$

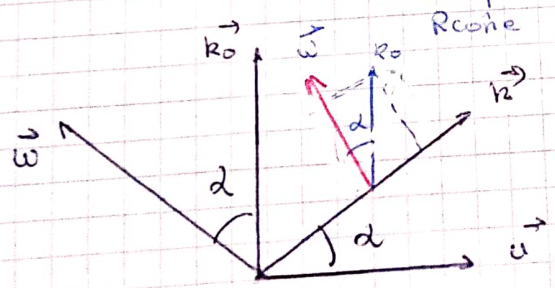
5/- Le moment cinétique

$\sigma_G(\text{cône}/R) = \Pi_G\,\vec{\Omega}(\text{cône}/R)$

on doit exprimer $\vec{\Omega}$ ds $R_{\text{cône}}(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

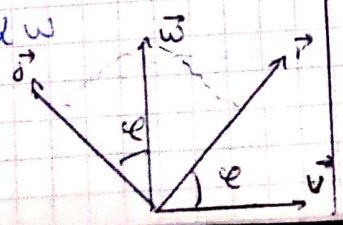
$\Omega(\text{cône}/R) = \dot{\varphi}\vec{k} + \dot{\psi}\vec{k_0}$

doit s'exprimer ds Rcône



$k_0 = \sin\alpha\,\vec{k} + \cos\alpha\,\omega$

$\vec{\omega} = \cos\varphi\,\vec{j} + \sin\varphi\,\vec{i}$



Donc $\vec{k_0} = \sin\alpha\,\vec{k} + \cos\alpha\cos\varphi\,\vec{j} + \cos\alpha\sin\varphi\,\vec{i}$.

Alors : $\vec{\Omega}(\text{cône}/R) = \begin{pmatrix} \dot{\psi}\cos\alpha\sin\varphi \\ \dot{\psi}\cos\alpha\cos\varphi \\ \dot{\varphi} + \dot{\psi}\sin\alpha \end{pmatrix}$

$\vec{\sigma}_G(\text{cône}/R) = \begin{pmatrix} \dot{\psi}\cos\alpha\sin\varphi \\ \dot{\psi}\cos\alpha\cos\varphi \\ \dot{\varphi} + \dot{\psi}\sin\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A' & 0 & 0 \\ 0 & A' & 0 \\ 0 & 0 & B' \end{pmatrix}$

$= \vec{\sigma}_G$ 6/ L'énergie cinétique E_c/R_0.

Calculons d'abord $\vec{V}(G/R_0)$

$\vec{V}(G/R_0) = \frac{d\vec{OG}}{dt}\Big/_{R_0}$

$\vec{V}(G/R_0) = \frac{d\vec{OG}}{dt}\Big/_{R_c} + \vec{\Omega}(R_c/R_0) \wedge \vec{OG}$

$= \begin{pmatrix} \dot{\psi}\cos\alpha\sin\varphi \\ \dot{\psi}\cos\alpha\cos\varphi \\ \dot{\varphi} + \dot{\psi}\sin\alpha \end{pmatrix}_{R_c} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3/4 \end{pmatrix}_{R_c}$ $\quad \vec{OG} = \frac{3}{4}h\,\vec{k}$

$\vec{V} = \begin{pmatrix} \dot{\psi}\cos\alpha\sin\varphi \\ \dot{\psi}\cos\alpha\cos\varphi \\ \frac{3}{4} + \dot{\varphi} + \dot{\psi}\sin\alpha \end{pmatrix}_{R(\vec{i},\vec{j},\vec{k})}$

Donc l'expression de E_c/R_0 est :

$E_c(\text{cône}/R_0) = \frac{1}{2}$

7/- on supposant que la rotation du cône autour de l'axe $O\vec{k_0}$ s'arrete $\dot{\psi}k_0 = 0$

Alors $\vec{\Omega}(\text{cône}/R_0) = \dot{\varphi}\vec{k}$

$\vec{\sigma}(\text{cône}/R_0) = \begin{pmatrix} A' & 0 & 0 \\ 0 & A' & 0 \\ 0 & 0 & B \end{pmatrix}_{R_c} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix}_{R_c}$

$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B\dot{\varphi} \end{pmatrix}_c$

$\sigma(S/R) = \frac{3mR^2}{5}\dot{\varphi}\vec{k}$

Donc le moment dynamique du Cône/R_0

$$\vec{\delta}_G = \frac{d\sigma(\omega_{nc}/R_0)}{dt}\Big/_{R_0}$$

$$= \frac{3MR^2}{5}\left(\ddot{\varphi}\vec{k} + \dot{\varphi}\frac{dk}{dt}\Big/_{R_0}\right)$$

$$= \frac{3MR^2}{5}\left(\ddot{\varphi}\vec{k} + \dot{\varphi}\left(\underbrace{\frac{dk}{dt}\Big/_{R_c}}_{0} + \underbrace{\vec{\Omega}(R_c/R_0)\wedge\vec{k}}_{\dot{\varphi}\vec{k}}\right)\right)$$

$$= \frac{3MR^2}{5}\left(\ddot{\varphi}\vec{k} + \dot{\varphi}0\right)$$

$$\boxed{\vec{\delta}_G = \frac{3MR^2}{5}\ddot{\varphi}\vec{k}}$$

Série 1

Exercice 1 :

1/- Montrons que φ une forme linéaire

soient $P = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$

$$\Phi = \sum_{i=0}^{n} b_i x^i$$

$\varphi(P+\Phi) = a_n + b_n$

$= \varphi(P) + \varphi(\Phi)$

$\varphi(\alpha P) = \varphi\left(\sum_{i=0}^{n} (\alpha a_i) x^i\right) = \alpha a_n$

$= \alpha \varphi(P)$

donc $\varphi \in (\mathbb{R}_n[x])^*$

2/- H l'hyperplan de $E \Leftrightarrow \exists f \in E^*$ $f \neq 0$

$H = \ker f$.

$\Leftrightarrow \exists D$ droite $E = H \oplus D$

$\dim H = \dim E - 1$

Méthode 1 :

$\varphi \in (\mathbb{R}_n[x])$ et $\varphi \neq 0$

car $\varphi(x^n) = 1 \neq 0$

$\varphi(1+x) = 0$

$\varphi(x^2) = \begin{cases} 1 & n=2 \\ 0 & n \neq 2 \end{cases}$

soit $P = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n \in \mathbb{R}_n[x]$

$P \in \ker(\varphi) \Leftrightarrow \varphi(P) = 0$

$\Leftrightarrow P \in \mathbb{R}_{n-1}[x]$

alors $\ker(\varphi) = \mathbb{R}_{n-1}[x]$

Méthode 2 :

$\dim \mathbb{R}_{n-1}[x] = n = \dim(\mathbb{R}_n(x)) - 1$

donc $\mathbb{R}_{n-1}[x]$ est un hyperplan de $\mathbb{R}_n[x]$

3/- Les supplementaire de $\mathbb{R}_{n-1}[x]$.

G supplementaire de F dans E

$\Leftrightarrow E = F \oplus G$

$\mathbb{R}_{n-1}[x]$ est un hyperplan de $\mathbb{R}_n[x]$

$\Leftrightarrow \exists$ une droite D de $\mathbb{R}_n[x]$ tq :

$\mathbb{R}_n[x] = \mathbb{R}_{n-1}[x] \oplus D$.

$\Leftrightarrow \exists P \in \mathbb{R}_n[x]$ $\boxed{D = \mathbb{R}.P} = \langle P \rangle$

tq : $\mathbb{R}_n[x] = \mathbb{R}_{n-1}[x] \oplus \langle P \rangle$

puisque $\mathbb{R}_{n-1}[x] \cap \langle P \rangle = \{0\}$

alors $P \notin \mathbb{R}_{n-1}[x]$

donc P est un polynôme de degré $d^\circ(P) = n$.

Conclusion : Les supplémentaires de $\mathbb{R}_{n-1}[x]$ sont les droite D de $\mathbb{R}_n[x]$ tq $D = \langle P \rangle$ ou $d^\circ(P) = n$.

Exercice 2 :

1/- $\mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n) / x_i \in \mathbb{R}\}$

$\mathbb{R}^{n-1}$ n'est pas un sous espace de $\mathbb{R}^n$

$\Rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$ n'est pas hyperplan de $\mathbb{R}^n$

2/- Les formes linéaires de $\mathbb{R}^n$

soit $\varphi \in (\mathbb{R}^n)^*$ ($\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$)

soit $X = (x_1, \dots, x_n)$

$= \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$

avec $e_0 = \{e_1, \dots, e_n\}$ base de $E = \mathbb{R}^n$

$e_1 = (1, 0, \dots, 0)$

$e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$

donc $\varphi(x) = \varphi\left(\sum_{i=0}^{n} x_i e_i\right)$

SHOT ON OPPO

Scanné avec CamScanner

$= \varphi(x_1 e_1 + \dots + x_n e_n)$

$= \sum_{i=1}^{n} x_1 \varphi(e_1)$

on pose $a_i = \varphi(e_i)$ $i = 1 \dots n$

donc $\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i = a_1 x_1 + \dots + a_n x_n$

Inversement:

supposons qu'il existe $a_1 \dots a_n \in \mathbb{R}$

tq: $\varphi(x_1, \dots x_n) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$

pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

$\varphi \in (\mathbb{R}^n)^*$?

soit $x = (x_1 \dots x_n)$ et $y = (y_1 \dots y_n)$

et $\alpha \in \mathbb{R}$

* $\varphi(x+y) = \sum_{i=1}^{n} a_i (x_i + y_i)$

$= \sum_{i=1}^{n} a_i x_i + \sum_{i=1}^{n} a_i y_i$

$= \varphi(x) + \varphi(y)$

* $\varphi(\alpha x) = \varphi(\alpha x_1 \dots \alpha x_n)$

$= \sum_{i=1}^{n} a_i (\alpha x_i)$

$= \alpha \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$

$= \alpha \varphi(x)$.

donc φ est une forme linéaire de $\mathbb{R}^n$.

Conclusion:

$\varphi \in (\mathbb{R}^n)^* \Leftrightarrow \exists a_1, \dots a_n \in \mathbb{R}$

tq: $\varphi(x_1, \dots x_n) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$

Exemple:

$\varphi \in (\mathbb{R}^2)^* \Leftrightarrow \exists a, b \in \mathbb{R}$

$\varphi(x, y) = ax + by$

pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

* $\varphi \in (\mathbb{R}^3)^* \Leftrightarrow \exists a, b, c \in \mathbb{R}$

$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ \varphi(x, y, z) = ax + by + cz$

* hyperplan de $\mathbb{R}^n$:

H hyperplan de $\mathbb{R}^n \Leftrightarrow \exists \varphi \in (\mathbb{R}^n)^*$

$\varphi \neq 0$ et $H = \ker(\varphi)$

$= \{(x_1, \dots x_n)$ où

$\varphi(x_1, \dots x_n) = 0\}$

$\Leftrightarrow \exists (a_1 \dots a_n) \in \mathbb{R}^n$ tq

$H = \{(x_1, \dots x_n) \in \mathbb{R}^n\} /$

$a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = 0\}$

Exemple:

* H hyperplan de $\mathbb{R}^2 \Leftrightarrow$

$\exists (a, b) \neq (0, 0)$

$H = \{(x, y) / ax + by = 0\}$

c'est une droite du plan qui passe par l'origine.

* H hyperplan de $\mathbb{R}^3 \Leftrightarrow$

$\exists (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 / \{0, 0, 0\}$

$H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / ax + by + cz = 0\}$

c'est une droite du plan de l'espace $\mathbb{R}^3$.

Exercice 3:

1/- B est une base de $\mathbb{R}^3$.

on considère la matrice

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$\det P = -1 \neq 0 \Leftrightarrow P$ est inversible.

D'où B est une base

Rq: $P = P_{B \to B}$

SHOT ON OPPO

Scanné avec CamScanner

2/- La base duale B^* de B

soit $B^* = \{u_1^*, u_2^*, u_3^*\}$ la base duale de B

$u_i^*(u_j) = \delta_{ij}$ pour tt $i, j = 1,2,3$

$B_0^* = \{e_1^*, e_2^*, e_3^*\}$ base de E^*

* $u_1^* = ae_1^* + be_2^* + ce_3^*$

$$\begin{cases} u_1^*(u_1) = 1 \\ u_1^*(u_2) = 0 \\ u_1^*(u_3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+c=1 \\ b-c=0 \\ a+b+c=0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow a = 0$ et $b = c = 1$

Donc $u_1^* = e_2^* + e_3^*$

* $u_2^* = ae_1^* + be_2^* + ce_3^*$

$$\begin{cases} u_2^*(u_1) = 0 \\ u_2^*(u_2) = 1 \\ u_2^*(u_3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+c=0 \\ b-c=1 \\ a+b-c=0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow a = -1$ et $b = 2$ et $c = 1$

Donc $u_2^* = -e_1^* + 2e_2^* + e_3^*$

* $u_3^* = ae_1^* + be_2^* + ce_3^*$

$$\begin{cases} u_3^*(u_1) = 0 \\ u_3^*(u_2) = 0 \\ u_3^*(u_3) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+c=0 \\ b-c=0 \\ a+b-c=1 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow a = c$ et $b = c$ et $a = 1$.

Donc $u_3^* = e_1^* + e_2^* + e_3^*$

+ La matrice de passage de B à B_0 : P

+ " " " de B_0 à B : P^{-1}

+ " " " de B_0^* à B^* : Φ

$$\Phi = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

On sait que $\Phi = {}^t(P^{-1})$

$\Rightarrow \underset{B-B_0}{\Phi} = P^{-1} = {}^t\Phi = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

3/- on a (u_1, u_2) libre car c'est une ???

Donc $\{u_1, u_2\}$ est une base de F

→ F est un hyperplan de E

2ème méthode 2: $\varphi : E \longrightarrow \mathbb{R}$

$x = au_1 + bu_2 + cu_3 \longrightarrow c$

on a bien $\varphi \in E^*$

$x = au_1 + bu_2 + cu_3 \in \ker f$

$\Leftrightarrow \varphi(x) = 0 \Leftrightarrow c = 0 \Leftrightarrow x \in F$

Donc $F = \ker(\varphi) \Rightarrow$ F est une hyperplan de E

* Vérifier que $x - y - z = 0$ eq de F

On considère $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$

$(x,y,z) \longrightarrow x - y - z$.

$X = (x,y,z)$

$X \in \ker f \Leftrightarrow f(x,y,z) = 0$

$\Leftrightarrow x - y - z = 0$

$\Leftrightarrow z = x - y$

$\Leftrightarrow X = (x, y, x-y)$

$\Leftrightarrow X = x(1,0,1) + y(0,1,-1)$

$\Leftrightarrow X = xu_1 + yu_2$

$\Leftrightarrow x \in F$

Donc $F = \ker f$

D'où $x - y - z = 0$ est une eq de F

SHOT ON OPPO

Scanné avec CamScanner

Exercice 6 :

1/ $F = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4)$ est la base de E^*. $\dim E^* = \dim E = 4 = \text{card}(F)$

Donc il suffit de montrer que F est libre.

on considère $\alpha, \beta, \gamma, \lambda \in \mathbb{R}$

tq $\alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2 + \gamma\varphi_3 + \lambda\varphi_4 = 0$

$\alpha\varphi_1(P) + \beta\varphi_2(P) + \gamma\varphi_3(P) + \lambda\varphi_4(P) = 0$

pour $\forall P \in E$

soit $P(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$

$P'(x) = b + 2xc + 3dx^2$

$\rightarrow \alpha a + \beta b + \gamma(a + b + c + d) + \lambda(b + 2c + 3d) = 0$ pour tout $a, b, c, d \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow a(\alpha + \gamma) + b(\beta + \gamma + \lambda) + c(\gamma + 2\lambda) + d(\gamma + 3\lambda) = 0$

$\begin{cases} b = c = d = 0 \\ a = 1 \end{cases} \Rightarrow \alpha + \gamma = 0 \Rightarrow \alpha = -\gamma$

$\begin{cases} a = c = d = 0 \\ b = 1 \end{cases} \Rightarrow \beta + \gamma + \lambda = 0 \Rightarrow \beta = -\gamma - \lambda$

$\begin{cases} a + b + d = 0 \\ c = 1 \end{cases} \Rightarrow \gamma + 2\lambda = 0 \Rightarrow \gamma = 0$

$\begin{cases} a = b = c = 0 \\ d = 1 \end{cases} \Rightarrow \gamma + 3\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 0$

$\rightarrow \alpha = \beta = \gamma = \lambda = 0$

Donc la famille est libre alors F est une base de E^*

2/ La base prédule de F :

soit $\beta = \{P_1, P_2, P_3, P_4\}$ la base prédule de F (i.e : $B^* = F$)

Donc $\varphi_i(P_j) = \delta_{ij}$ pour tout $i, j = 1, 2, 3, 4$

* $i = 1$: $P_1 = a + bx + cx^2 + dx^3$

$\begin{cases} \varphi_1(P_1) = 1 \\ \varphi_2(P_1) = 0 \\ \varphi_3(P_1) = 0 \\ \varphi_4(P_1) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ a + b + c + d = 0 \\ b + 2c + 3d = 0 \end{cases} \rightarrow$

$\begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ c + d = -1 \\ 2c + 3d = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ c = -3 \\ d = 2 \end{cases}$

SHOT ON OPPO

Scanné avec CamScanner

3/- $\psi : E = \mathbb{R}_3[X] \longrightarrow \mathbb{R}$

$P \longrightarrow \psi(P) = \int_0^1 P(t)\,dt$

$\psi \in E^* \leftarrow \mathcal{F} = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$

$P_1 = 1 - 3x^2 + 2x^3$

$P_2 = x - 2x^2 + x^3$

$P_3 = 3x^2 - 2x^3$

$P_4 = -x^2 + x^3$

$\mathcal{B} = \{P_1, P_2, P_3, P_4\}$

$$P_{B,B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 3 & -1 \\ 2 & -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

3/-

$\psi = \lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2 + \lambda_3 \varphi_3 + \lambda_4 \varphi_4$

$= \sum_{i=1}^{4} \lambda_i \varphi_i$

pour $j = 1 \ldots 4$, $\psi(P_j) = \sum_{i=1}^{4} \lambda_i \varphi_i(P_j)$

$= \sum_{i=1}^{4} \lambda_i \delta_{ij} = \lambda_j$

Donc $\psi = \sum_{i=1}^{4} \psi(P_i)\varphi_i$

* $\psi(P_1) = \int_0^1 P_1\,dx$

$= \int_0^1 1 - 3x^2 + 2x^3\,dx$

$= \frac{1}{2}$

* $\psi(P_2) = \int_0^1 P_2\,dx$

$= \int_0^1 x - 2x^2 + x^3\,dx$

$= \frac{1}{12}$

* $\psi(P_3) = \int_0^1 P_3\,dx$

$= \int_0^1 3x^2 - 2x^3\,dx$

$=$

* $\psi(P_4) = \int_0^1 P_4\,dx$

$= \int_0^1 -x^2 + x^2\,dx$

$= -1/12$

Alors $\psi = \frac{1}{2}\varphi_1 + \frac{1}{12}\varphi_2 + \frac{1}{2}\varphi_3 - \frac{1}{12}\varphi_4$

$\psi = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{12}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{12}\right)$ dans la base $\mathcal{F}$.

Serie 2 :

Exercice 1 :

1/- produit scalaire $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$(u, v) \longrightarrow u.v$

soit $u.v \in E$ $f(u,v) = u.v$

$= f(v,u)$

Donc f est symétrique.

il suffit de montrer que f est linéaire à gauche ou à droite.

soient : $u_1, u_2, v_2 \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

$f(u_1 + \lambda u_2, v) = (u_1 + \lambda u_2).v$

$= u_1 v + \lambda u_2 v$

$= f(u_1, v) + \lambda f(u_2, v)$

→ donc f est bilinéaire symétrique avec f est linéaire à gauche (λ à u)

• $f(u_1 + \lambda u_2) = f(u_1 + \lambda u_2, u)$

$= f(v_1, u) + \lambda f(v_2, u)$

$= f(u, v_1) + \lambda f(u_2, v_1)$

2/- Produit vectoriel $g : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$

$(u, v) \longrightarrow u \wedge v$

g est une f. b, antisymétrique

3/- Produit mixte

SHOT ON OPPO

Scanné avec CamScanner

$h : E \times E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$

$(u,v,w) \longmapsto u.(v \wedge w)$

linéarité par rapport à u:

soient $u_1, u_2, v, w \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

$h(u_1 + \lambda u_2, v, w) = (u_1 + \lambda u_2)(v \wedge w)$

$= (u_1 (v \wedge w)) + \lambda u_2 (v \wedge w)$

$= h(u_1, v, w) + \lambda h(u_2, v, w)$

→ h est linéaire par rapport à u

de même, on montre que h est linéaire par rapport à v et w

donc h est une forme trilinéaire

h est alternée :

$h(u,u,w) = u(u \wedge w)$

$= 0$ car $u \perp (u \wedge w)$

$h(u,v,u) = u(v \wedge u)$

$= 0$

$h(u,v,v) = u(v \wedge v)$

$= 0$

donc h est alternée.

Exercice 2:

- on a B est une famille liée

alors $u = \alpha v + \beta w$ avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$

~~donc $\Phi(u,v,w) = \Phi$~~

et comme Φ est une forme trilinéaire alternée

$\Phi(u,v,w) = \Phi(\alpha v + \beta w, v, w)$

$= \alpha \Phi(v,v,w) + \beta \Phi(w,v,w)$

$= 0$

Exercice 3:

b une forme bilinéaire symétrique sur E ← un e.v

$x \perp_b y \Leftrightarrow b(x,y) = 0$

A une partie de E

$A^\perp = \{x \in E \mid \forall a \in A : x \perp a\}$

$= \{x \in E \mid \forall a \in A \; b(x,a) = 0\}$

1/ $A^\perp$ est un sous esp v de E

$b(0,a) = b(0+0,a)$

$= b(0,a) + b(0,a) = 2b(0,a)$

→ $b(0,a) = 0$

$b(a,a) = b(x.x, a) = b(x,a) - b(x,a) = 0$

$b(0a, a) = 0 \; b(a,a) = 0$

(autre méthode)

donc $0 \in A^\perp$ → $A^\perp \neq \phi$

* soient $x, y \in A^\perp$ et $\lambda \in \mathbb{K}$

soit $a \in A$

$b(x + \lambda y, a) = b(x,a) + \lambda b(y,a)$

$= 0 + 0 = 0$

$\Rightarrow x + \lambda y \in A^\perp$

Ce qui montre que $A^\perp$ est une sous. e.v de E.

2/ $A \subset B \Rightarrow B^\perp \subset A^\perp$

supposons que $A \subset B$

$y \in B^\perp \Rightarrow \forall x \in B \; b(x,y) = 0$

soit $a \in A \Rightarrow a \in B$

$\Rightarrow b(a,y) = 0$

donc $y \in A^\perp$

d'où $B^\perp \subset A^\perp$

SHOT ON OPPO

Scanné avec CamScanner

3/- $A^\perp = (\mathrm{vect}(A))^\perp$

on a $A \subset \mathrm{vect}(A)$ $(a \in A)$ $a = a \times 1 \in \mathrm{vect}(A)$

$\boxed{\Rightarrow \mathrm{Vect}(A)^\perp \subset A^\perp}$

inversement :

on pose $x \in A^\perp \Leftrightarrow \forall a \in A, b(x,a) = 0$

si $y \in (\mathrm{Vect}(A))$

donc $y = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i$ $\quad a_i \in A$

et $\lambda_i \in \mathbb{K}$ pour tout $i = 1 \dots n$

$b(x,y) = b(x, \sum_{i=1}^{n} x_i a_i)$

$= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (x, a_i) = 0$

Car $x \in A^\perp$

$\Rightarrow x \in (\mathrm{Vect}(A))^\perp$

$\Rightarrow A^\perp \subset (\mathrm{Vect}(A))^\perp$

$\Rightarrow A^\perp = (\mathrm{Vect}(A))^\perp$

*) $A \subset (A^\perp)^\perp$ evident

5/- ~~pour~~ soient A et B deux s.e.v de E. Mq $(A+B)^\perp = A^\perp \cap B^\perp$

on a $A \subset A+B$ et $B \subset A+B$

(car $a \in A \Rightarrow a = a + 0 \in A+B$ $0 \in B$: c'est un s.e.v)

alors on a : d'après (*)

$\begin{cases} (A+B)^\perp \subset A^\perp \\ (A+B)^\perp \subset B^\perp \end{cases} \Rightarrow (A+B)^\perp \subset A^\perp \cap B^\perp$

Inversement :

soit $x \in A^\perp \cap B^\perp \Rightarrow x \in A^\perp$ et $x \in B^\perp$

$\Rightarrow b(x, a+b) = b(x,a) + b(x,b) = 0$

pour $a \in A$ et $b \in B$

donc $x \in (A+B)^\perp$

donc $A^\perp \cap B^\perp \subset (A+B)^\perp$

d'où l'egalité

Exercice 5

Rq : si φ est une application symetrique ou antisymetrique alors pour demontrer que il est bilineaire il suffit à montrer que linéaire droite et à gauche.

→ linearité à gauche :

soient $u_1 = (x_1, y_1, z_1)$

$u_2 = (x_2, y_2, z_2)$

et $V = (x', y', z') \in \mathbb{R}^3$ et $\alpha \in \mathbb{R}$

$\varphi_1(u_1 + \alpha u_2, V) = -(x_1 + \alpha x_2)x' + 2(y_1 + \alpha y_2)z' - (z_1 + \alpha z_2)x' - 2(z_1 + \alpha z_2)z'$

$= x_1 x' - x_1 y' + 2yz' - z_1 x' - 2z_1 z' + \alpha(x_2 x' - y_2 y' + 2y_2 z' - z_2 x' - 2z_2 z' + x_2 x')$

$= \varphi_1(u_1, V) + \alpha \varphi_1(u_2, V)$

Donc φ_1 est linéaire à gauche

→ linéarité à droite : m façons

Donc φ_1 est forme bilinéaire

* La matrice de φ_1 dans la base canonique B_0 :

$$M = \begin{array}{c|ccc} & x' & y' & z' \\ \hline x & 1 & -1 & 0 \\ y & 0 & -1 & 2 \\ z & -1 & 0 & -2 \end{array}$$

n'est symetrique ni antisymetrique

Scanné avec CamScanner

→ φ_1 n'est symétrique ni antisymétrique

2/- $\varphi_2 : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$

$(u,v) \longrightarrow xx' + yx' + xy' + 3y'$

on a $\varphi_2(u,v) = \varphi(v,u) \Rightarrow \varphi_2$ est symétrique donc il suffit demontrer que φ_2 est linéaire à gauche.

En effet : soient $u_1 = (x,y,z)$

$u_2 = (x_2, y_2, z_2)$ et $V = (x',y',z')$

et $a \in \mathbb{R}$.

$\varphi_2(u_1 + au_2, v) = \varphi_2(u,v) + a\varphi_2(u_2, v)$

conclusion : φ_2 est une f.b.s

* φ_2 est non dégénérée :

méthode 1 :

La matrice de φ_2 dans la base canonique.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\det M = -1 \neq 0 \Rightarrow$ M est inversible

donc φ_2 est non dégénéré.

méthode 2 : soit $u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$

tque $\forall v = (x',y',z') \in \mathbb{R}^3$ $\varphi_2(u,v) = 0$

donc $xx' + xy' + yx' + 3z' = 0$

càd $x'(x+y) + xy' + 3z' = 0$

$$\begin{cases} x+y = 0 \\ x = 0 \\ 3 = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow x = y = 3 = 0 \Rightarrow u(0,0,0)$$

d'où φ_2 est non dégénérée.

φ est définie positive ?

φ_2 est définie positive $\Leftrightarrow \forall u \neq 0$

$\varphi(u,u) > 0$

soit $u = (x,y,z)$

$\varphi_2(u,u) = x^2 + 2xy + z^2$

pour $u = (2, -2, 0)$

on a $\varphi(u,u) = -4$

(et pour $v = (1,-1,1)$ on a $\varphi(v,v) = 1$)

donc φ_2 n'est pas définie positive.

Exercice 6 :

1/- ψ est un f.b

Soient $P, Q, R \in \mathbb{R}_2[x]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\psi(P + \lambda R, Q) = \int_0^1 (P + \lambda R)(t)\, Q'(t)\, dt$$

$$= \int_0^1 P(t) Q'(t) + \lambda R(t) \cdot Q'(t)\, dt$$

$$= \int_0^1 P(t) Q'(t)\, dt + \lambda \int_0^1 R(t) Q'(t) dt$$

$$= \psi(P,Q) + \lambda \psi(R,Q)$$

donc ψ est linéaire à gauche.

* $\psi(P, Q + \lambda R) = \int_0^1 P(t) \cdot (Q + \lambda R)'(t)\, dt$

$$= \int_0^1 P(t) Q'(t)(t)\, dt + P(t) R'(t) dt$$

$$= \psi(P,Q) + \lambda \psi(P,R)$$

donc ψ est linéaire à droite.

d'où ψ est une f.b.

2/- La matrice de ψ ds la base canonique $B = \{1, x, x^2\}$

$\psi(1,1) = 0$

$\psi(1,x) = -1$

$\psi(1,x^2) = \int_0^1 2t\, dt = 1$

$\psi(x,1) = 0$

$\psi(x,x) = \int_0^1 t\, dt = \frac{1}{2}$

$\psi(x,x^2) = \int_0^1 2t^2\, dt = \frac{2}{3}$

Scanné avec CamScanner

$\psi(x^2, 1) = 0$

$\psi(x^2, x) = \int_0^1 t^2 = \frac{1}{3}$

$\psi(x^2, x^2) = \int_0^1 2t^3 dt = \frac{1}{2}$

Donc $M_B(\psi) = \begin{array}{c} \\ 1 \\ x \\ x^2 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1/2 & 2/3 \\ 0 & 1/3 & 1/2 \end{pmatrix}$

M n'est pas inversible (elle contient une colonne nulle donc ψ est dégénérée.

3/- La symétrie.

On a. $tM \neq M$, $tM \neq -M$ $\Rightarrow$ n'est symétrique ni antisymétrique

→ La décomposition de ψ.

$\psi = \frac{\psi_s + \psi_a}{2}$

où $\psi(P, Q) = \frac{\psi(P,Q) + \psi(Q,P)}{2}$

$= \frac{1}{2} \int_0^1 P(t) Q'(t) + Q(t) P'(t) dt$

$= \frac{1}{2} [P(t) Q(t)]_0^1$

$= \frac{1}{2} (P(1) Q(1) - P(0) Q(0))$

(ψ est une f.b.s)

$\psi_a(P, Q) = \frac{1}{2} (\psi(P,Q) - \psi(Q,P))$

$= \frac{1}{2} \int_0^1 P(t) Q'(t) - Q(t) P'(t) dt$

4/- M que $\psi(P, P) \leq 0 \Leftrightarrow |P(1)| \leq |P(0)|$

Soit $P \in E$

$\psi(P, P) \leq 0 \Leftrightarrow \int_0^1 P(t) P'(t) dt \leq 0$

$\Leftrightarrow [\frac{1}{2} P^2(t)]_0^1 \leq 0$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2} (P^2(1) - P^2(0)) \leq 0$

$\Leftrightarrow P^2(1) \leq P^2(0)$

$\Leftrightarrow |P(1)| \leq |P(0)|$

Rappel :

ψ est définie positive

$\Leftrightarrow \forall P \in E \setminus \{0\} \quad \psi(P, P) > 0$

$P \in E \Leftrightarrow P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$

$|P(1)| \leq |P(0)| \Leftrightarrow |a_0 + a_1 + a_2| \leq |a_0|$

on prend $P(x) = 1 - x$.

on a $|P(1)| < |P(0)|$

donc $\psi(P, P) \leq 0$

donc ψ n'est pas définie positive

Exercice :

$q(x + \lambda y) = \varphi(x + \lambda y, x + \lambda y)$

$= \varphi(x, x + \lambda y) + \lambda \varphi(y, x + \lambda y)$

$= \varphi(x, x) + \lambda \varphi(x, y) + \lambda (\varphi(y, x) + \lambda \varphi(y, y))$.

$= \varphi(x, x) + \lambda \varphi(x, y) + \lambda \varphi(y, x) + \lambda^2 \varphi(y, y)$

$= q(x) + 2\lambda \varphi(x, y) + \lambda^2 q(y)$

Soit x et $y \in E$.

$P(t) = q(x + ty) = q(y) t^2 + 2\varphi(x, y) t + q(x) \geq 0$

(*)

Car q est positive.

1ère cas : Si $q(y) = 0$ alors

$2\varphi(x, y) t + q(x) \geq 0$ (pour $t \in \mathbb{R}$)

$\Rightarrow 2\varphi(x, y) t \geq -q(x)$.

Supposons, par l'absurde que $\varphi(x, y) \neq 0$

Pour $t = \frac{-q(x) - 1}{\varphi(x, y)}$ on obtient

SHOT ON OPPO

Scanné avec CamScanner

$-2q(x) - 2\lambda \geq -q(x) \Rightarrow -2\lambda \geq -q(x)$ absurde

Donc $\varphi(x,y) = 0$

$\Rightarrow \varphi(x,y)^2 \leq q(x)\, q(y)$

2ème cas : $q(y) \neq 0 \Leftrightarrow q(y) > 0$

* le discriminant de $P(\lambda)$ est nul ou négative

Cad $\Delta \leq 0 \Rightarrow 4\varphi^2(x,y) - 4q(y)\, q(x) \leq 0$

$\Rightarrow \varphi^2(x,y) \leq q(y)\, q(x)$

Conclusion $\forall x, y \in E$

$(\varphi(x,y))^2 \leq q(x)\, q(y)$

3/- q est définie positive

M que

$\Leftrightarrow$ Soit $x, y \in E$ tque $x = \lambda y$ $\lambda \neq 0$

$(\varphi(x,y))^2 = (\varphi(\lambda y, y))^2$

$= \lambda^2 (\varphi(y,y))^2$

$= \lambda^2 q^2(y)$ $\quad q(x) = q(\lambda y) = \lambda^2 q(y)$

$= q(x)\, q(y)$

$\Rightarrow$ Soient $x, y \in E$ tque

$(\varphi(x,y))^2 = q(x)\, q(y)$

$\boxed{q \text{ est définie} \Leftrightarrow x \neq 0 \Rightarrow q(x) \neq 0 \Leftrightarrow q(x) = 0 \Rightarrow x = 0}$

$P(t) = q(x + ty) = q(y)t^2 - 2\varphi(x,y)t + q(x)$

si $q(y) \neq 0$:

Le discriminant de $P(\lambda)$

$\Delta = 4\varphi(x,y)^2 - q(x)\, q(y) = 0$

donc $\exists\, t_0 \in \mathbb{R}$ $P(t_0) = q(x + t_0 y) = 0$

$\Rightarrow x + t_0 y = 0$ (y est définie)

$\Rightarrow x$ et y sont liés

* si $q(y) = 0$

$\Rightarrow y = 0$ (q est définie)

$\Rightarrow x$ et y sont liés.

4/- On a $q(x+y) = 2\varphi(x,y) + q(x) + q(y)$

et on a $\varphi^2(x,y) \leq q(x)\, q(y)$

alors $\varphi(x,y) \leq |\varphi(x,y)|$

$\leq \sqrt{q(x)\, q(y)}$

alors $q(x) + q(x) + 2\varphi(x,y) \leq$

$q(x) + q(y) + 2\sqrt{q(x)\, q(y)}$

$0 \leq q(x+y) \leq (\sqrt{q(x)} + \sqrt{q(y)})^2$

alors $\sqrt{q(x+y)} \leq \sqrt{q(x)} + \sqrt{q(y)}$

Exercice 7.

1/ $q_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$(x,y,z) \to x^2 + y^2 - z^2 + 4xy - 2yz - z^2$

$q_1(x,y,z) = x^2 + 4xy + xz + y^2 - z^2 - 2yz$

$= x^2 + 2x(2y + \frac{1}{2}z) + y^2 - z^2 - 2yz$

$= (x + 2y + \frac{1}{2}z)^2 - (2y + \frac{1}{2}z)^2 + y^2 - z^2 - 2yz$

$= (x + 2y + \frac{1}{2}z)^2 - 3y^2 - 4yz - \frac{1}{4}z^2 - z^2$

$= (x + 2y + \frac{1}{2}z)^2 - 3(y^2 + \frac{4}{3}yz) - \frac{5}{4}z^2$

$= (x + 2y + \frac{1}{2}z)^2 - 3[(y + \frac{2}{3}z)^2 - \frac{4}{9}z^2] - \frac{5}{4}z^2$

$= (x + 2y + \frac{1}{2}z)^2 - 3(y + \frac{2}{3}z)^2 + (\frac{4}{3} - \frac{5}{4})z^2$

$= (x + 2y + \frac{1}{2}z)^2 - 3(y + \frac{2}{3}z)^2 + \frac{1}{12}z^2$

$= f_1^2(x,y,z) - 3f_2^2(x,y,z) + \frac{1}{2}f_3^2(x,y,z)$

avec : $\begin{cases} f_1(x,y,z) = x + 2y + \frac{1}{2}z \\ f_2(x,y,z) = y + \frac{2}{3}z \\ f_3(x,y,z) = z \end{cases}$

Remarque : soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ /

$\alpha f_1 + \beta f_2 + \gamma f_3 = 0$

$\Rightarrow \alpha f_1(x,y,z) + \beta f_2(x,y,z) + \gamma f_3(x,y,z)$

pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}$

Pour (...

Pour (...

pour (...

$\Rightarrow \{ f_1 ...$

* Le ...

on a ...

de $(\mathbb{R}^3 ...$

* soit ...

produ...

ϕ (...

Scanné avec CamScanner

Pour $(1,0,0) : \alpha = 0$
Pour $(0,1,0) : \beta = 0$
Pour $(0,0,1) : \gamma = 0$

$\Rightarrow \{f_1, f_2, f_3\}$ est libre.

+ La base q_1-orthogonale:

on a $v = \{f_1, f_2, f_3\}$ est une base de $(\mathbb{R}^3)^*$.

* soit $B = \{u_1, u_2, u_3\}$ la base preduale de v.

$\phi(u_i, u_j) = 0 \quad i \neq j$

SHOT ON OPPO

Scanné avec CamScanner

2/- $q_2(x,y,z) = xy + yz + 2xz$

⇒ méthode de gauss.

$= (x+z)(y+2z) - 2z^2$

$= \frac{1}{4}(x+y+y+2z)^2 - \frac{1}{4}(x+z-y-2z)^2 - 2z^2$

$= \frac{1}{4}(x+y+3z)^2 - \frac{1}{4}(x-y-z)^2 - 2z^2$

$= \frac{1}{4}x'^2 - \frac{1}{4}y'^2 - 2z'^2$

tel que :

$$\begin{cases} x' = x+y+3z \\ y' = x-y-z \\ z' = z \end{cases}$$

soit $B = \{u_1, u_2, u_3\}$ une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle les composants de u sont (x', y', z')

et $q(u) = \frac{1}{4}x'^2 - \frac{1}{4}y'^2 - 2z'$

* La matrice de passage de B à B_0 est $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = P$

* La matrice de passage de B_0 à B est P^{-1} :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & -1/2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/2 & -1/2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & -1/2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Scanné avec CamScanner

① Donc P_1^{-1}

2/- La matrice de Ψ par rapport à la Base canonique $B = \{1, X, X^2\}$

$$M = M_B(\Psi)$$

$$M = \begin{pmatrix} \Psi(1,1) & \Psi(1,X) & \Psi(1,X^2) \\ \Psi(X,1) & \Psi(X,X) & \Psi(X,X^2) \\ \Psi(X^2,1) & \Psi(X^2,X) & \Psi(X^2,X^2) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$X = P_2(X) = X$

$1 = P_1(X)$

$\Psi(1,1) = P_1(1)\,P_1(-1) + P_1(-1)\,P_1(1)$

$= 1 \times 1 + 1 \times 1 = 2$

$\Psi(1,X) = P_1(1)\,P_2(-1) + P_1(-1)\,P_2(1)$

$= 1 \times (-1) + 1 \times 1 = 0$

$\Psi(1,X^2) = 2$

$\Psi(X,X) = (-1) \times (-1) = 2$

$\Psi(X,X^2) = 0$

$\Psi(X^2,X^2) = 2$

3- $B = \{1 - X^2, X, X^2\}$

puisque B est une base de E alors

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ la matrice formée par les vecteurs colonne de B

$\det P = 1 \neq 0$ alors B est une base

Rq : P = la matrice de passage B_0 à B

b/ La matrice de Ψ dans la Base B

Soit M' = la matrice de Ψ dans la Base B

Exercice 10 :

1/- Ψ est une forme bilinéaire symétrique.

Ψ est une forme bilinéaire symétrique

- Ψ est symétrique $\Psi(P,Q) = \Psi(Q,P)$
- il suffit de montrer la linéarité à gauche.

En effet :

soient P_1, P_2, $\alpha \in E = \mathbb{R}_2[X]$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

$\Psi(P_1 + \alpha P_2, Q) = \Psi(P_1, Q) + \alpha \Psi(P_2, Q)$

d'où Ψ est une f.b.s

Scanné avec CamScanner

M : la matrice de passage Ψ ds la base B_0.

on a $M' = {}^tPMP$ où $P = P_{B_0 \to B}$

$$M' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

c/- L'expression de Ψ ds la base B.

$$E \begin{cases} B_1 \to M_1 \\ \downarrow \\ B_2 \to M_2 \end{cases} \Rightarrow M_2 = {}^tP M_1 P$$

- soit $P \in E = \mathbb{R}_2[X]$

On pose $P = a(1-x^2) + bx + cx^2$

$\Rightarrow P = (a, b, c)$

$Q = a'(1-x^2) + b'x + c'x^2$

$\Rightarrow Q = (a', b', c')$

Alors $\Psi(P, Q) = {}^tX M Y$

avec $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$

$$= (a\ b\ c)\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$$

$$= (a\ b\ c)\begin{pmatrix} 0 \\ -2b' \\ 2c' \end{pmatrix}$$

$$\left[\Psi(P, Q) = -2bb' + 2cc'\right]$$

La forme quadratique associée est définie par : $\left[q(P) = \Psi(P, P) = -2b^2 + 2c^2\right]$

avec $p = (a, b, c)$ dans B.

d/- $I_q = ?$

Soit $P = a(1-x^2) + bx + cx^2$

$P \in I_q \Leftrightarrow q(P) = 0$

$\Leftrightarrow -2b^2 + 2c^2 = 0$

$\Leftrightarrow b = c$ ou $b = -c$

Si $b = c \Rightarrow P = a(1-x^2) + b(x + x^2)$

$\Rightarrow P \in \text{vect}(1-x^2, x+x^2)$

Si $b = -c \Rightarrow P = a(1-x^2) + b(x - x^2)$

$\Rightarrow D \in \text{vect}(1-x^2, x-x^2)$

donc $I_q = \text{vect}(1-x^2, x+x^2) \cup \text{vect}(1-x^2, x-x^2)$

4/- Soit $P = ax^2 + bx \in E = \mathbb{R}^2[X]$

$P \in F \Leftrightarrow P(0) = 0$

$\Leftrightarrow P = ax^2 + bx \Leftrightarrow P = \text{vect}\langle x, x^2 \rangle$

donc $F = \text{vect}(x, x^2)$

et on a $B = \{x, x^2\}$ est une famille libre

alors $\dim F = 2 = \dim \mathbb{R}[X] - 1$

et on a F est un s.e.v de $\mathbb{R}_2[X]$

alors F est un hyperplan, et sa base et $B' = \{x, x^2\}$.

b/- $F^{\perp_\Psi} = ?$

Soit $P = a + bx + cx^2 \in \mathbb{R}_2[X]$

$P \in F^\perp \Leftrightarrow \forall Q \in F \quad \Psi(P, Q) = 0$

$\Leftrightarrow \Psi(P, x) = 0$ et $\Psi(P, x^2) = 0$

(si $Q = \alpha x + \beta x^2 \in F$, $\Psi(P, Q)$

$= \alpha \Psi(P, x) + \beta \Psi(P, x^2) = 0$)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -P(1) + P(-1) = 0 \\ P(1) + P(-1) = 0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow P(1) = P(-1) = 0$

$\Leftrightarrow 1$ et -1 sont les racines de P :

$Q = a + bx + cx^2 \in F^\perp \Leftrightarrow c(x-1)(x+1)$

Scanné avec CamScanner

$\Leftrightarrow P \in \text{vect}(X^2-1)$

d'où $F^\perp = \text{vect}(X^2-1)$

Conclusion :

$F \oplus F^\perp = E = \mathbb{R}_2[X]$

Remarque :

φ une f.b.s $\rightarrow$ orthogonalité

$x \perp y \Leftrightarrow \varphi(x,y) = 0$

Si F est un sous espace vect de E

$\dim F + \dim F^\perp = \dim E$

mais $F \oplus F^\perp \not= E$ (n'est pas tjs).

* Mais : φ un produit scalaire (= une f.b.s dont q_φ est définie positive)

une orthogonalité

$x \perp y \Leftrightarrow \varphi(x,y) = 0$

$F \oplus F^\perp = E$.

$\rightarrow P = (1,1,0) \neq 0$

$q(P) = -2b^2 + 2c^2 = -2 < 0$

$\Rightarrow$ q n'est pas définie positive

$\rightarrow P = (1,1,1) \neq 0$

$\Rightarrow$ q n'est pas définie

Exercice 12 :

1/- U est une forme bilinéaire

$\rightarrow$ La linéarité de f $\Rightarrow \varphi$ est linéaire à gauche

" " deg $\Rightarrow \varphi$ est linéaire à droite

donc φ est une f.b.s.

2/- soient $u, v \in E$

$\varphi_s(u,v) = \frac{1}{2}(\varphi(u,v) + \varphi(v,u))$

$= \frac{1}{2}(f(u)g(v) + f(v)g(u))$

3/- φ_s est non dégénéré :

φ_s est non dégénérée $\forall v \in E$

$\varphi_s(u,v) = 0 \Rightarrow u = 0$

Soit $u \in E$ tque $\forall v \in E \ \varphi_s(u,v) = 0$

$\Rightarrow \forall v \in E \ \frac{1}{2}(f(u)g(v) + f(v)g(u)) = 0$

En particulier pour $v = u$,

on obtient $f(u) \cdot g(u) = 0$

$\Rightarrow f(u) = 0$ ou $g(u) = 0$

$\Rightarrow u = 0$ car f et g sont injectives

d'où φ_s est non-dégénérée.

Série 3 :

Exercice 1.

$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ est une matrice carré d'ordre 3

admettant 3 valeurs propres 3, 1 et 5 distinctes.

donc A est diagonalisable

$f(e_1)\ f(e_2)\ f(e_3)$

$B = \begin{pmatrix} e_1 & 1 & 0 & 0 \\ e_2 & 1 & 2 & 0 \\ e_3 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$

B admet deux valeurs propres

- 1 simple
- 2 double

$\rightarrow \dim E_1 = 1$

$\rightarrow 1 \leq \dim E_2 \leq 2$

on a $f(e_2) = 2e_2 \rightarrow e_2$ valeur propre de B associé à $\lambda = 2$.

$f(e_3) = 2e_3 \rightarrow e_3$ " " " associe à $\lambda = 2$.

SHOT ON OPPO

Scanné avec CamScanner

donc $e_2, e_3 \in E_2$

Comme $\{e_2, e_3\}$ libre

donc $\dim E_2 = 2 = m_2$

D'où B est diagonalisable

$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$

C'est triangulaire sup donc C admet une valeur propre $\lambda = 0$ triple

Supposons par l'absurde :

que C est diagonalisable

$\Rightarrow \exists P$ inversible tque

$P^{-1} C P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_3$

$\Rightarrow C = P 0_3 P^{-1} = 0_3$ absurde.

donc C n'est pas diagonalisable.

Rq : si $A \in M_n(\mathbb{K})$ admet une valeur propre d'ordre n.

Si A est diagonalisable

$\Rightarrow \exists P$ inversible tque $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda \end{pmatrix} = \lambda I_n$

$\Rightarrow A = P(\lambda I_n) P^{-1} = \lambda I_n$

- Si $A = \lambda I_n \Rightarrow$ A est diagonalisable
- Si $A \neq \lambda I_n \Rightarrow$ A n'est diagonal

M n'est pas inversible $\Leftrightarrow 0 \in Sp(M)$

Exercice 2 :

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

- Valeur propres :

$P_A(x) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & & 1 \\ 0 & 1 & \end{vmatrix} = 0$

$= (1-x) \begin{vmatrix} 1-x & 1 \\ 1 & 3-x \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3-x \end{vmatrix}$

$= (1-x)[(1-x)(3-x) - 1] - 2(3-x-2)$

$= (1-x)[(1-x)(3-x) \cdot 1) - 2(1-x)$

$= (1-x)[(1-x)(3x) - 1 - 2]$

$= (1-x)(3 - x - 3x + x^2 - 3)$

$= (1-x)(x^2 - 4x)$

$= x(1-x)(x-4)$

alors $Sp(A) = \{0, 1, 4\}$

alors A admet 3 valeur propres distinctes deux à deux donc A est diagonalisable

est $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ la matrice diagonalisable.

* pour E_0 :

soit $x = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in E_0 \Leftrightarrow Ax = 0$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0$

$\begin{cases} a + b + 2c = 0 & (1) \\ 2a + b + c = 0 & (2) \\ b + 3c = 0 & (3) \end{cases}$

$\begin{cases} -a + c = 0 & (2) - (1) \\ b + 3c = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a = c \\ b = -3c \end{cases}$

Scanné avec CamScanner

donc $x = c\begin{pmatrix}1\\-3\\1\end{pmatrix}$

alors E_0 est une droite engendré par le vecteur $u_1 = (1,-3,1)$

* pour E_1 :

$x \in E_1 \Leftrightarrow Ax = x \Leftrightarrow (A-I)x = 0$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix}0&1&2\\2&0&1\\0&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} b+2c=0 \\ 2a+c=0 \\ b+2c=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} b=-2c \\ c=-2a \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} b=4a \\ c=-2a \end{cases}$

donc $x = a\begin{pmatrix}1\\4\\-2\end{pmatrix}$

d'où E_1 est une droite engendré par le vecteur $u_2 = (1,4,-2)$

pour E_4 :

$x \in E_4 \Rightarrow Ax = 4x$

$\Leftrightarrow (A-4I_n)x = 0$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix}-3&1&2\\1&-3&1\\0&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -3a+b+2c=0 \\ 2a-3b+c=0 \\ b-c=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} b=c \\ a=b \end{cases}$

donc $x = a\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

donc E_4 est une droite engendré par le vecteur $u_3 = (1,1,1)$

donc $P = \begin{pmatrix}1&1&1\\-3&4&1\\1&-2&1\end{pmatrix}$

puisque A est diagonalisable, alors

$E = E_0 \oplus E_1 \oplus E_4$

donc $B = \{u_1, u_2, u_3\}$ est base de $\mathbb{R}^3$.

$f(u_1) = 0\,u_1$

$f(u_2) = 1\,u_2$ (f l'endomorphisme associé à A)

$f(u_3) = 4\,u_3$

$\Rightarrow M_B(f) = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&4\end{pmatrix}$

et donc $P^{-1}AP = D = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&4\end{pmatrix}$

Rappel :

f un endomorphisme de E (une matrice).

$P_f(X) = (X-\lambda_1)^{m_1} \dots (X-\lambda_p)^{m_p}$

$\lambda_i \longrightarrow E_{\lambda_i}$ sous espace associé à λ_i.

→ Les E_{λ_i} sont en somme direct.

$E_{\lambda_i} \oplus \dots \oplus E_{\lambda_p}$ sous espace de

$m_1 + \dots + m_p = n$

→ si f est diagonalisable alors

$E = E_{\lambda_i} \oplus \dots \oplus E_{\lambda_p}$

$B = \begin{pmatrix}3&2&0\\-1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

polyme caractéristique :

$P_B(X) = \det(B-\lambda I) = \begin{vmatrix}3-x&2&0\\-1&-\lambda&0\\0&0&1-\lambda\end{vmatrix}$

$= (1-\lambda)\begin{vmatrix}3-\lambda&2\\-1&-\lambda\end{vmatrix}$

SHOT ON OPPO

Scanné avec CamScanner

$= (1-\lambda)(\lambda^2 - 3\lambda + 2)$

$= (1-\lambda)(\lambda-1)(\lambda-2)$

$= -(\lambda-1)^2(\lambda-2)$

B admet 2 valeurs propres

$\lambda = 1$ double

$\lambda = 2$ simple

*Pour E_1 :

$1 \leq \dim E_1 \leq m_1$

$x = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$x = (x, z, y) \in E_1 \Leftrightarrow (B - I)x = 0$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\begin{cases} 2x + 2y = 0 \\ -x - y = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow y = -x$

$u = (x, y, z) = x(1, -1, 0)$

$+ z(0, 0, 1) = 2u_1 + 3u_2$

donc $E_1 = \text{vect}(u_1, u_2)$

$\{u_1, u_2\}$ est libre

donc $\dim E_1 = 2 = m_1$

* pour E_2 :

$x = (x, y, z) \in E_2 \Leftrightarrow (B - 2I)x = 0$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\begin{cases} x + 2y = 0 \\ -x - 2y = 0 \\ -z = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} x = -2y \\ z = 0 \end{cases}$

$u = (x, y, z) = x(1, -2, 0)$

$E_2 = \text{vect}(u_3 = (1, -2, 0))$

d'où la matrice est diagonalisable

donc $\mathbb{R}^3 = E_1 \oplus E_2$

donc $B = \{u_1, u_2, u_3\}$ Base de $\mathbb{R}^3$.

la matrice de passage de B_0 à B est :

$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

et on a :

$P^{-1}BP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

la Base duale

Exercice 3 :

1-/ La matrice de φ ds la base $B = \{1, x, x^2, x^3\}$

$\varphi(1) = 3x$

$\varphi(x) = 3x^2 - (x^2 - 1) = 2x^2 + 1$

$\varphi(x^2) = 3x^3 - 2x(x^2 - 1) = x^3 + 2x$

$\varphi(x^3) = 3x^4 - 3x^2(x^2 - 1) = 3x^2$

Donc :

$M_B(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

2/- $P_{\varphi(x)} = \begin{vmatrix} -x & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -x & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -x & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -x \end{vmatrix}$

$= -x \begin{vmatrix} -x & 2 & 0 \\ 2 & -x & 3 \\ 0 & 1 & -x \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & -x & 3 \\ 0 & 1 & -x \end{vmatrix}$

Scanné avec CamScanner

$= -x\left(-1\begin{vmatrix}-x & 3\\ 1 & -x\end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix}2 & 0\\ 1 & -x\end{vmatrix}\right)$

$= 3\begin{vmatrix}-x & 3\\ 1 & -x\end{vmatrix}$

$= -x(-x(x^2-3)+4x)-3(x^2-3)$

$= x^2(x^2-3)-4x^2-3(x^2-3)$

$= x^4-3x^2-4x^2-3x^2+9$

$= x^4-10x^2+9$

$= (x^2-1)(x^2-9)$

$= (x-1)(x+1)(x-3)(x+3)$

D admet 4 valeurs propres distincts

Donc P est diagonalisable

* Pour $\lambda = 3$: E_3 sous espace propre associé à $\lambda = 3$

Soit $P = ax^3+bx^2+cx+d \in E_3(\Phi)$

$P \in E_3 \Leftrightarrow \Phi(P) = 3P$

$\Leftrightarrow 3xP-(x^2-1)P' = 3P$

$\Leftrightarrow 3ax^4+3bx^3+3cx^2+3dx-(x^2-1)(3ax^2+2bx+c) = 3(ax^3+bx^2+cx+d)$

$\Leftrightarrow 3ax^4+3bx^3+3cx^2+3dx-3ax^4-2bx^3-cx^2+3ax^2+2bx+c = 3ax^4+3bx^3+3cx+3d$

$\begin{cases} 3b-2b=3a \\ 3c-c-3a=3b \\ 3d+2b=3c \\ c=3d \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} b=3a \\ 2c=2b \\ c=3d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=b=3a \\ a=d \end{cases}$

$P = ax^3+3ax^2+3ax+a$

$= a(x^3+3x^2+3x+1)$

donc E_3 est une droite engendrée par $P_3 = x^3+3x^2+3x+1$

Pour $\lambda = -3$

Soit $P = a+bx+cx^2+dx^3 \in (a,b,c,d)$

$P \in E_{-3} \Leftrightarrow (M+3I)X = 0$ avec $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$

$P \in E_{-3} \Leftrightarrow (M+3I)X = 0$ avec $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3a+b=0 \\ 3a+3b+2c=0 \\ 2b+3c+3d=0 \\ c+3d=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} d=-3a \\ c=-3d \\ -6a+2c=0 \\ -6a-6d=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d=-a \\ d=-3a \\ c=3a \end{cases}$

$\Leftrightarrow P = a(1-3x+3x^2-x^3)$

d'où $E_3 = \text{vect}(P_4 = 1-3x+3x^2-x^3)$

de la même manière

$E_1 = \text{vect}(x^3+x^2-x-1)$

et $E_{-1} = \text{vect}((x-1)^2(x+1))$

La matrice de passage

$P = \left(P_{-1} \mid P_1 \mid P_{-1} \mid P_{-1}\right)$

$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

SHOT ON OPPO

Scanné avec CamScanner

Exercice 5 :

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \quad f \circ f = f$

$f \neq 0$ et $f \neq id_{\mathbb{R}^n}$

1- Les valeurs propres de f :

Déf : f est idenpotent $\Leftrightarrow f^2 = f \circ f = f$

λ valeur propre $\Leftrightarrow \exists x \neq 0$ ~~$f \circ f(x) = f(\lambda x)$~~ $f(x) = \lambda x$

$\Leftrightarrow f \circ f(x) = f(\lambda x)$

$\Leftrightarrow f(x) = \lambda f(x)$

$\Leftrightarrow \lambda x = \lambda^2 x$

$\Leftrightarrow (\lambda - \lambda^2) x = 0$

$\Leftrightarrow \lambda = 0$ ou $\lambda = 1$

$Sp(f) = \{0, 1\}$

2- Soit $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

M que $u = f(x) \in E_1$: sous espace propre associé à $\lambda = 1$

et que $v = x - f(x) \in E_0$

En effet :

- $f(x) = f(f(x)) = f(x) = u \Rightarrow u \in E_1$
- $f(v) = f(x - f(x)) = f(x) - f \circ f(x) = 0$

$\Rightarrow v \in E_0$

3- f est diagonale :

Il suffit de montrer que (~~$E_0 \oplus E_1 = \{0\}$~~ ~~en effet ...~~)

$\mathbb{R}^n = E_0 \oplus E_1$

on a tjs $E_0 + E_1 \subset \mathbb{R}^n$

- Soit $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

D'après 2°) $\begin{cases} u = f(x) \in E_1 \\ v = x - f(x) \in E_0 \end{cases}$

$x = x - f(x) + f(x) = v + u \in E_0 + E_1$

donc $E = \mathbb{R}^n \subset E_0 + E_1$

$\Rightarrow \mathbb{R}^n = E = E_0 + E_1$

Exercice 6 :

$f \in \mathcal{L}(E) \quad \dim E \geq 2$

$rg(f) = 1 \quad f \circ f \neq 0$

1- $rg(f) = \dim(Im(f)) = 1$

$\Rightarrow \exists u \in E / \{0\} = Im(f) = \langle u \rangle$

2- u est une valeur propre de f

$f(u) = Im(f) = \langle u \rangle \Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{K}$:

$f(u) = \lambda u$.

Donc u est un valeur propre de f associé à λ.

Reste à montrer que $\lambda \neq 0$

Supposons, pour l'absurde que $\lambda = 0$ donc $f(u) = 0$.

Soit $x \in E \Rightarrow f(x) \in Im(f) = \langle u \rangle$

$\Rightarrow \exists \alpha \in \mathbb{K} : f(x) = \alpha u$

$\Rightarrow f \circ f(x) = f(\alpha u) = \alpha f(u) = 0$

Càd $\forall x \in E \; f \circ f(x) = 0$ ce qui applique $f \circ f \neq 0$

Conclusion : u et un vecteur propre de f associé à $\lambda \neq 0$.

5-

Exercice 5 :

V- $sp(f) = ?$

$\lambda \in sp(f) \Leftrightarrow \exists x \neq 0 \; f(x) = \lambda x$

$\Rightarrow f \circ f(x) = f(\lambda x)$

$\Rightarrow f(x) = \lambda f(x)$

SHOT ON OPPO

Scanné avec CamScanner

$f(x) = \lambda^2 x$

$\Rightarrow (\lambda^2 - \lambda)x = 0$

$\Rightarrow \lambda = 0$ ou $\lambda = 1$

$\Rightarrow \lambda \in \{0,1\}$

donc $sp(f) \subset \{0,1\}$

Inversement :

$f \neq id \Leftrightarrow \exists x \in E \setminus \{0\}\ f(x) \neq x$

$\Rightarrow u = f(x) - x \neq 0$

$f(u) = f \circ f(x) - f(x)$

$= f(x) - f(x)$

$\Rightarrow f(u) = 0 = 0u$

$\Rightarrow$ Donc 0 est une valeur propre de f Cad $0 \in sp(f)$

on a $f \neq 0$

$\Rightarrow \exists x \in E \setminus \{0\}\ f(x) \neq 0$ $(f(0) = 0)$

$\Rightarrow v = f(x)$

$\Rightarrow f(v) = f \circ f(x)$

$= f(x)$

$f(v) = v$

$\Rightarrow 1$ valeur propre de f

Cad $1 \in sp(f)$

Conclusion $sp(f) = \{0,1\}$

Exercice 4 :

1- $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

* polynôme caractéristique

$P_A(x) = -(x-1)^2(x-2)$

donc A admet deux valeurs propres

1 double et 2 simple.

A est diagonalisable $\Leftrightarrow$ $P_A(x)$ est scindé et $\dim E_1 = m_1$.

A est diagonalisable ?

Le polynôme minimale de A est :

soit $(x-1)^2(x-2)$ ou soit $(x-1)(x-2)$

on a $(A - I_3)(A - 2I_3)$

$= \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0_3$

donc $m_A(x) = (x-1)^2(x-2)$ qui admet une racine double et une racine simple donc A n'est pas diagonalisable.

A est diagonalisable $\Leftrightarrow$ le polynôme minimal n'admet que des racines simples

matrice de passage.

pour E_1.

soit $u(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$

et $E_1 \Leftrightarrow (A - I_3)X = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -2x + 2y = 0 \\ -x - y + z = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ $\quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ z = 0 \end{cases}$

donc E_1 est une droite engendré par le vecteur $u_1 = (1,-1,0)$

donc $\dim E_1 = 1 < m$.

on cherche u_2 tq $A.u_2 = u_1 + u_2$?

Cad $(A - I)u_2 = u_1$. $f(u_2)$

on pose $u_2 = (x,y,z)$ alors $(A-I)u_2$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 2y = 1 \\ -x + z = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = x - 1 \\ y = \frac{1}{2} - x \end{cases}$.

Scanné avec CamScanner

système admet une infinité des solutions.

Pour $x=0$ on a $z=-1$ et $y=1/2$

donc $u_2 = (0, \frac{1}{2}, -1)$

Pour E_2:

$x \in E \Leftrightarrow (A-2I_3)x = 0$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = 0 \\ -x - 2y + z = 0 \\ -z = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} z = 0 \\ x = -2y \end{cases}$

donc E_2 est une droite engendrée par $u_3 = (2, 1, 0)$.

donc $P = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1/2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ inversible

$\Rightarrow B = \{u_1, u_2, u_3\}$ est une base de $E = \mathbb{R}^3$

$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

2/- $B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & -6 \\ 0 & 4 & 8 \end{pmatrix}$

* Polynôme caractéristique:

$P_B(x) = \begin{vmatrix} 4-x & 0 & -1 \\ 0 & -2-x & -6 \\ 0 & 4 & 8-x \end{vmatrix}$

$= -(x-4)^2(x-2)$

$\Rightarrow B$ admet 2 valeurs propres 2 simples, 4 double.

* Le polynôme minimale de B ou soit $(x-4)^2(x-2)$

on a $(B-4I_3)(B-2I_3)$

$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -6 & -6 \\ 0 & 4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & -4 & -6 \\ 0 & 4 & 6 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 0 & -4 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \neq 0$

donc $m_B(x) = (x-4)^2(x-2)$ qui a une racine double

Donc B n'est pas diagonalisable

* Puisque $P_B(\lambda)$ est scindé, la matrice B est trigonalisable.

* la matrice de passage:

Pour E_2:

$u = (x, y, z) \in E_2 \Leftrightarrow (B-2I_3)x = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - z = 0 \\ -4y - 6z = 0 \\ 4y + 6z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = 2x \\ y = -\frac{6}{4} z = -3x \end{cases}$

$\Rightarrow u = x(1, 2, -3)$

donc $E_2 = \text{vect}(\boxed{u_1 = (1, 2, -3)})$

Pour E_4: sous espace propre associé à $\lambda = 4$.

$u = (x, y, z) \in E_4 \Leftrightarrow (B-4I_3)x = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -z = 0 \\ -6y - 6z = 0 \\ 4y + 4z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

$E_4 = \text{Vect}(\boxed{u_2 = (1, 0, 0)})$

Méthode 1:

On complète la famille $\{u_1, u_2\}$

SHOT ON OPPO

Scanné avec CamScanner

en une base $B=\{u_1,u_2,u_3\}$ de $\mathbb{R}^3$

par exemple, on prend $u_3=(0,0,1)$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

$\Rightarrow B=\{u_1,u_2,u_3\}$ est bien base de $\mathbb{R}^3$.

avec f l'endomorphisme defenie par:

ona $f(u_1)=2u_1$

$f(u_2)=4u_2$

$f(u_3)=au_1+bu_2+cu_3$

ds la nouvelle base B, la matrice de f est $\begin{pmatrix} 2 & 0 & a \\ 0 & 4 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ matrice triangulaire sup

et ona $P^{-1}BP=T=\begin{pmatrix} 2 & 0 & a \\ 0 & 4 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$

Méthode 2:

on cherche u_3 tq: $\begin{cases} B=\{u_1,u_2,u_3\} \text{ base de } \mathbb{R}^3 \\ f(u_3)=\alpha u_2+\beta u_3 \end{cases}$

soit $u_3=(x,y,z)$

$f(u_3)=u_2+4u_3 \Leftrightarrow (f-4I)u_3=u_2$

$\Leftrightarrow (B-4I)u_3=u_2$

$$\begin{cases} -3=1 \\ -6y-6z=0 \\ 4y+4z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z=-1 \\ y=-z=1 \end{cases}$$

$\Rightarrow u_3=(x,1,-1)$ $(x\in\mathbb{R})$

on prend par exemple $u_3=(1,1,-1)$

$B=\{u_1,u_2,u_3\}$ base de $\mathbb{R}^3$ (car $\det(u_1,u_2,u_3)\neq 0$)

ds cette base ona

$$\begin{cases} f(u_1)=2u_1 \\ f(u_2)=4u_2 \\ f(u_3)=u_2+4u_3 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$M_B(f)=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = T$$

$P^{-1}BP=T$

Serie 3

Ex 1: Soit A une matrice nilpotente

$\exists p\in\mathbb{N}^*$ $A^p=0$

$\exists q\in\mathbb{N}^*$ $B^q=0$

on pose $n=p+q$

$$(A+B)^n=\sum_{k=0}^{n} C_n^k A^k B^{n-k}$$

Si $k\geq p \Rightarrow A^k=0$

Si $k<p \Rightarrow n-k>n-p=q \Rightarrow B^{n-k}=0$

Donc $(A+B)^n=0$

Donc $A+B$ est nilpotante.

2/- evident.

Ex 3: $\varphi\in\mathcal{L}(\mathbb{R})$ definie par

$$A=\begin{pmatrix} 7 & 5 & -13 \\ -3 & -1 & 9 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\varphi: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$(x,y,z) \longrightarrow (7x+5y-13z,-3x-y+9z,x+y)$

$\varphi(e_1)=\varphi(1,0,0)=(7,-3,1)$.

polynôme caractéristique:

1- $P_A(x)=\begin{vmatrix} 7-x & 5 & -13 \\ -3 & -1-x & 9 \\ 1 & 1 & -1-x \end{vmatrix}$

$=-(x-2)^3$

2- on déduire que $(A-2I)$

D'après le théorème de Cay

Hamilton $P_A(A)$

Càd $(A-2I_3)^3=0$

2- A n'est pas diagonalisable.

A admet 2 comme valeur propre triple puisque $A \neq 2I_3$

alors A n'est pas diagonalisable.

3- La réduite de Jordan :

A n'est pas diagonalisable

$P_A(x)$ est scindé $\Rightarrow \exists P$ inversible

tq $P^{-1}AP = J$ = matrice de Jordan.

$$J=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

• E_2 : sous espace propre associé à 2 :

$u = (x,y,z) \in E_2 \Leftrightarrow (A-2I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x+5y-13z=0 & (1) \\ -3x-3y+9z=0 & (2) \\ x+y-2z=0 & (3) \end{cases}$$

$(2)+3(3) \Rightarrow \begin{cases} z=0 \\ y=-x \end{cases}$

$\Rightarrow u = x(1,-1,0)$

Donc $E_2 = \text{vect}(u=(1,-1,0))$

$\Rightarrow \dim E_2 = 1$

$\Rightarrow$ La matrice de Jordan contient un seul bloc associé à $\lambda = 2$

Donc la matrice de Joran est de la forme $J = \begin{array}{c|ccc} & u_1 & u_2 & u_3 \\ \hline u_1 & 2 & 1 & 0 \\ u_2 & 0 & 2 & 0 \\ u_3 & 0 & 0 & 2 \end{array}$

D'après la décomposition des noyau on a $\text{Ker}(A-2I)$

$\text{Ker}(A-2I) \underset{T}{\subseteq} \text{Ker}((A-2I)^2) \underset{T}{\subseteq} \text{Ker}(A-2I_3)^3 = E = \mathbb{R}^3$

on cherche un vecteur $V_3 \in \text{Ker}((A-2I)^3)$

$\times \text{Ker}(A-2I)^2) \in \mathbb{R}^3 \setminus \text{Ker}((A-2I)^2)$

$$(A-2I_3)^2 = \begin{pmatrix} 5 & 5 & -13 \\ -3 & -3 & 9 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 5 & -9 \\ -3 & -3 & 9 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -3 & -3 & 6 \\ 3 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$(x,y,z) \in \text{Ker}(A-2I_3)^2) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -3 & -3 & 6 \\ 3 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow -3x-3y+6z=0$

$\Leftrightarrow x+y-2z=0$

$\text{Ker}((A-2I_3)^2)$ est un plan engendré par $(-1,1,0)$ et $(2,0,1)$

on a $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$

$\Rightarrow \{(-1,1,0),(2,0,1),(0,0,1)\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$

puique $\dim(\text{Ker}(A-2I_3)^2) = 2$

alors $V_3 = (0,0,1) \notin \text{Ker}((A-2I)^2)$

$$\begin{array}{ccc} V_1 & V_2 & V_3 \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$Q(V_3) = V_2 + 2V_3$

$\Leftrightarrow Q(V_3) - 2V_3 = V_2$

$\Leftrightarrow (Q-2I)V_3 = V_2$

$\Leftrightarrow (A-2I_3)V_3 = V_2$

Par itération on cherche V_2 tq :

$(A-2I_3)V_3 = V_2$.

$$\Rightarrow V_2 = \begin{pmatrix} 5 & 5 & -13 \\ -3 & -3 & 9 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 \\ 9 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Par itération on cherche V_1 tq :

$(A-2I)V_2 = V_1$

$\Rightarrow V_1 = ($

$(A-2I_3)$

$\Rightarrow Q($

$(A-2I_3$

$(A-2I_3$

Conc

$B =$

La

et o

4/-

on

SHOT ON OPPO

Scanné avec CamScanner

$\Rightarrow D$ $V_1 = \begin{pmatrix} 5 & 5 & -13 \\ -3 & -3 & 9 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -13 \\ 9 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}$

$(A - 2I_3)V_3 = V_2 \Rightarrow AV_3 - 2V_3 = V_2$

$\Rightarrow Q(V_3) = V_2 + 2V_3$

$(A - 2I_3)V_2 = V_1 \Rightarrow Q(V_2) = V_1 + 2V_2$

$(A - 2I_3)V_1 = (A - 2I_3)(A - 2I_3)V_2$

$= (A - 2I_3)(A - 2I_3)(A - 2I_3)V_3$

$= (A - 2I_3)^3 V_3$

$= 0$.

Conclusion:

$B = \{V_1, V_2, V_3\}$ est bien base de $\mathbb{R}^3$

La matrice de passage est $P = \begin{pmatrix} 6 & -13 & 0 \\ -6 & 9 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

et on a : $P^{-1}AP = J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

4/- Décomposition de dun Jord de J.

on a : $J = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$= D + N$

on a D est diagonale

$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$

$N^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

donc N est nilpotente d'indice de nilpotence 3.

puisque $DN = ND$

alors la décomposition de dun Jord de J est $N + D$.

5- $A^n = ?$ $n \geq 4$

on a $P^{-1}AP = J \Rightarrow A = PJP^{-1}$

$\Rightarrow A^n = PJ^nP^{-1}$

D'autre part $J^n = (D+N)^n$

$(DN) = (ND)$.

$J^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k N^k D^{n-k}$

$= C_n^0 D^n + C_n^1 ND^{n-1} + C_n^2 N^2 D^{n-2} + 0$ ($N^k = 0 \ \forall k \geq 3$, $N^3 = 0$)

$= 2^n I_3 + n 2^{n-1} N + \frac{n(n-1)}{2} 2^{n-2} N^2$

$\Rightarrow J^n = \begin{pmatrix} 2^n & & \\ & 2^n & \\ & & 2^n \end{pmatrix} + n\begin{pmatrix} 0 & 2^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 2^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$+ \frac{n(n-1)}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$J^n = \begin{pmatrix} 2^n & n2^{n-1} & \frac{n(n-1)}{2} 2^{n-1} \\ 0 & 2^n & \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$

(1) et (4) Reduction des endomorphisme : Dans l'exom.

Ex2 :

$B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & -2 \\ -2 & -1 & -2 & -4 \\ 4 & 6 & 1 & 6 \\ -2 & -4 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

Les valeurs propres :

$P_B(x) = \begin{vmatrix} 1-x & -2 & +4 & 2 \\ -2 & -1-x & -2 & -4 \\ 4 & 6 & 1-x & 6 \\ -2 & -4 & -2 & -1-x \end{vmatrix}$

$C_1 \leftarrow C_1 - C_3$

$C_2 \leftarrow C_2 - C_4$

$= \begin{vmatrix} 3-x & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 3-x & -2 & -4 \\ 3+x & 0 & 1-x & 6 \\ 0 & 3+x & -2 & -1-x \end{vmatrix}$

SLOT ON ORBO

Scanné avec CamScanner

$$P_B(x) = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \\ 1 & 0 & 1-x & 6 \\ 0 & -1 & -2 & -1-x \end{vmatrix} \quad (3+x)(3-x)$$

$L_3 \leftarrow L_3 + L_4$

$L_4 \leftarrow L_4 + L_2$

polynome car...

Scindé si toute les polynome est ordre 1

$(x-1)(x+1)$ scindé (x^2+1) mode dans $\mathbb{C}$

$(x^2-2) = (x-2)(x+2)$ scindé

$$= (3+x)(3-x) \begin{vmatrix} -1 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 5-x & 4 \\ 0 & 0 & -4 & -5-x \end{vmatrix}$$

$$= -(3+x)(3-x)(x^2 - 5x - 25 + 5x + 16)$$

$$= (x+3)(x-3)(x^2-9)$$

$$= (x-3)^2(x+3)^2$$ l'ordre de multiplicité

B admet deux valeur propre

- 3 double
- -3 double.

2/- sous espace propre associé à $\lambda = 3$

$u = (x, y, z, t) \in E_3 \Leftrightarrow (B - 3I_4)x = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2x - 2y + 4z - 2t = 0 \\ -2x - 4y - 2z - 4t = 0 \\ 4x + 6y - 2z + 6t = 0 \\ -2x - 4y - 2z - 4t = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y - 2z + t = 0 & (1) \\ x + 2y + z + 2t = 0 & (2) \\ 2x + 3y - z + 3t = 0 & (3) \end{cases}$$

$2 \times (1) - (2) \Rightarrow$

$$\begin{cases} x - 5z = 0 \Rightarrow x = 5z \\ y + 3z + t = 0 & (2)' \\ y + 3z + t = 0 & (3)' \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 5z \\ y = -3z - t \end{cases}$$

$\Rightarrow u = z(5, -3, 1, 0) + t(0, -1, 0, 1)$

donc $E_3 = \text{Vect}(5, -3, 1, 0), (0, -1, 0, 1)$

$$= -(3+x)(3-x) \begin{vmatrix} 1 & -2 & -4 \\ 0 & 5-x & 4 \\ 0 & -4 & -5-x \end{vmatrix}$$

E_{-3} : Hermetienne.

$u(x, y, z, t) \in E_{-3}$

$\Leftrightarrow E_{-3} = \text{vect}(V_3 = (1, 0, -1, 0))$

* Puisque $\dim E_{-3} < m_3 = 2$ alors B n'est pas dignoralisable

(m_3 c'est l'ordre de multiplicité par exemple -3 l'ordre c'est 2 et 3 c'est 2).

3/- La matrice de Jordon

$P_B(x)$ est scindé $\Rightarrow$ B admet une réduction de Jordon

- $\dim E_3 = 2 \Rightarrow$ La matrice J de Jordon contient deux blocs de Jordon associé à $\lambda = 3$
- $\dim E_{-3} = 1 \Rightarrow$ J contient un seul bloc associé à $\lambda = 3$

donc $J = \begin{pmatrix} (3) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (3) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ La matrice de Jordon de A.

Méthode 1 :

On cherche un vecteur V_4 tq

$$\begin{cases} B = \{V_1, V_2, V_3, V_4\} \text{ base de } E = \mathbb{R}^4 \\ f(V_4) = V_3 - 3V_4 \quad (*) \end{cases}$$

$(*) \Leftrightarrow f(V_4) + 3V_4 = V_3$

$\Leftrightarrow (B + 3I_4)V_4 = V_3$

$$\begin{cases} 4x - 2y + 4z - 2t = 1 \\ -2x + 2y - 2z - 4t = 0 \\ 4x + 6y + 4z + 6t = -1 \\ -2x - 4y - 2z + 2t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \\ y = \\ z = \\ t = \end{cases}$$

$$B+3I_4 = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 & -2 \\ -2 & 2 & -2 & -4 \\ 4 & 6 & 4 & 6 \\ -2 & -4 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

méthode 2:

On sait que $Ker((B+3I_4)) \subset Ker((B+3I_4)^2)$

on cherche un vecteur

$u_4 \in Ker((B+3I_4)^2) \setminus Ker(B+3I_4)$

on a $(B+3I_4)^2 = \begin{pmatrix} 40 & 20 & 40 & 20 \\ -12 & +12 & -12 & -24 \\ 8 & 4 & 8 & 4 \\ -12 & -24 & -12 & 12 \end{pmatrix}$

$u \in Ker(B+3I_4)^2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y+2z+t=0 & (1) \\ -x+y-z-2t=0 & (2) \\ 2x+y+y+t=0 \\ -x-2y-z+t=0 & (3) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+2z+2t=0 & (2)-(3) \\ 3y-3t=0 \Rightarrow y=t \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=-z-t \\ y=t \end{cases}$$

$u = z(-1,0,1,0)+t(-1,1,0,1)$

$\Rightarrow Ker(B+3I_4)^2) = Vect((-1,0,1,0);(-1,1,0,1))$

Puisque $Ker((B+3I_4)) = Vect((1,0,-1,0))$

donc $V_4 = (-1,1,0,1) \in Ker((B+3I_4)^2) \setminus Ker(B+3I_4)$

Par, iteration, on cherche

$U_3 = (f+3I_d)U_4$

$$U_3 = (B+3I_3)U_4 = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 & -2 \\ -2 & 2 & -2 & -4 \\ 4 & 6 & 4 & 6 \\ -2 & -4 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Conclusion: $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

La matrice de passage est

$$P = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -8 & -1 \\ -3 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1}BP = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

4)- $J = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & & & 0 \\ & 3 & & \\ & & -3 & \\ 0 & & & -3 \end{pmatrix}$

$$+ \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{N}$$

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donc $J = D+N$

et on a $DN = ND$

D'après Binôme de Newton

$$J^n = (D+N)^n = \sum_{n}^{n} C_n^k N^k D^{n-k}$$

$$= C_n^0 D^n + C_n^1 N D^{n-1}$$

$$= D^n + nN \begin{pmatrix} 3^{n-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3^{n-1} & & \\ 0 & & (-3)^{n-1} & \\ & & & (-3)^{n-1} \end{pmatrix}$$

5/- on pose $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \\ t_n \end{pmatrix}$

système $\Leftrightarrow$

$X_{n+1} = AX_n$

Par recurrence on montre

$X_n = A^n X_0 = (PJP^{-1})^n X_0$

$X_n = PJ^nP^{-1}X_0 \Rightarrow \begin{cases} x_n = \\ y_n = \\ z_n = \\ t_n = \end{cases}$

SHOT ON OPPO

Scanné avec CamScanner

Exercice 4:

1- Les valeurs propres

$$P_A(x) = \begin{vmatrix} 2-x & -2 & 2 \\ 2 & 2-x & 2 \\ 1 & 1 & 2-x \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 2-x & 0 & 2 \\ 2 & 4-x & 2 \\ 1 & 3-x & 2-x \end{vmatrix}$$

$$P_f(x) = (2-x)\begin{vmatrix} 4-x & 2 \\ 3-x & 2-x \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2 & 4-x \\ 1 & 3-x \end{vmatrix}$$

$$= (2-x)(8 - 4x - 2x + x^2 - 6 + 2x) + 2(6 - 2x - 4 + x)$$

$$= (2-x)(x^2 - 4x + 2) + 2(-x + 2)$$

$$= (2-x)(x^2 - 4x + 4)$$

$$= -(x-2)^3$$

donc f admet une seule valeur propre $\lambda = 2$ triple.

* th de Cayley-Hamilton:

$P_f(f) = 0$

c.à.d $(f - 2Id)^3 = 0$

$\Rightarrow \text{Ker}(f - 2Id)^3) = E$

2/- A n'est pas diagonalisable

3/- Polynôme minimal

On sait que $m_f(x) / P_f(x)$

donc $m_f(x)$ est soit $x-2$,

Soit $(x-2)^3$

* $A - 2I_3 \neq 0$

* $(A - 2I_3)^2 = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} -2 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \neq 0$

Donc le polynôme minimale est $m_f(x) = (x-2)^3$

SHOT ON OPPO

Scanné avec CamScanner